Einführung

Das Abenteuergefühl ist ein Element des Spiels. Wir setzen uns der Ungewissheit des Schicksals aus und erleben, wie wir es durch unsere eigene Tätigkeit in den Griff bekommen. Alex Randolph, Spieleautor¹

Die Ungewissheit im Gesellschaftsspiel

Warum spielen wir? Woher rührt der Reiz eines Spiels? Was bringt Menschen dazu, oft stundenlang zu spielen? Wo bleibt die Langweile, wenn immer wieder das gleiche Spiel gespielt wird? Wirklich das gleiche Spiel?

Wirklich gleich bleiben bei einem Spiel nur seine Regeln, Verlauf und Ausgang ändern sich hingegen von Partie zu Partie. Die Zukunft bleibt zunächst im Dunklen – wie im richtigen Leben, aber auch wie im Roman, im Spielfilm und beim sportlichen Spiel. Das sorgt für Unterhaltung und erzeugt zugleich Spannung.

Verstärkt wird die Spannung durch die Möglichkeit zum Gewinn. Jeder Spieler hofft zu gewinnen – um einen materiellen Gewinn zu erlangen, in der Hoffnung auf ein kurzes Glücksgefühl, als Selbstbestätigung oder im Hinblick auf Anerkennung. Egal, um was es "geht", jeder Spieler kann hoffen. Sogar ein Verlierer darf wieder Hoffnung schöpfen, wenn das Spiel weiter geht: "Neues Spiel – neues Glück". Dabei wirkt die Hoffnung auf einen Gewinn oft stärker als das Wissen über schlechte Gewinnchancen. Die Popularität von Kasino- und Lotteriespielen beweist das ständig neu.

Unterhaltung und allseitige Gewinnhoffnung haben dieselbe Basis, nämlich die Abwechslung im Spiel. Durch sie bleiben die Spieler lange im Ungewissen über die weitere Entwicklung einer Partie bis hin zu deren Resultat. Wie aber kommt es zu dieser Ungewissheit? Welche Mechanismen des Spiels verursachen sie? Bereits anhand von Spielen wie Roulette, Schach und Pokern lassen sich drei prinzipiell verschiedene Typen von Ursachen erkennen:

- 1. Zufall.
- 2. Vielfältige Kombinationen der möglichen Züge.
- 3. Unterschiedlicher Informationsstand der einzelnen Spieler.

1. Zufällige Einflüsse treten bei Gesellschaftsspielen in der Hauptsache beim Würfeln auf, ebenso beim Mischen von Spielkarten und -steinen. Der Verlauf einer Partie wird dann im Rahmen der Spielregeln sowohl von Entscheidungen der Spieler, als auch den Ergebnissen zufälliger Prozesse bestimmt. Dominiert der Einfluss des Zufalls gegenüber denen der Spieler, spricht man von Glücksspielen. Bei reinen Glücksspielen ist die Entscheidung eines

Zitiert nach Spielbox 1985/1, S. 30. Alex Randolph ist Autor so bekannter Spiele wie Twixt, Geister und Hol's der Geier sowie Mitautor von Sagaland. Die vollständige Liste mit über fünfzig Titeln findet man im jährlich neu erscheinenden Taschenbuch Spiel des Friedhelm Merz Verlages, Bonn.

VI Einführung

Spielers über die Teilnahme und die Höhe des Einsatzes bereits die wichtigste. Glücksspiele, die um Geld gespielt werden, unterliegen traditionell gesetzlichen Reglementierungen^{I, 2}.

- 2. Im Allgemeinen erhalten die Spieler während des Verlaufs einer Partie in genau festgelegten Situationen die Gelegenheit zu handeln. Zur Auswahl stehen dabei bestimmte, durch die Spielregeln fixierte Handlungsmöglichkeiten. Ein Spielabschnitt, der genau eine solche Handlungsmöglichkeit eines Spielers umfasst, wird Zug genannt. Bereits nach wenigen Zügen können sich die erlaubten Möglichkeiten zu einer kaum noch überschaubaren Vielfalt kombinieren, so dass die Konsequenzen eines einzelnen Zuges nur noch schwer zu erkennen sind. Genau diesem Umstand verdanken Schachaufgaben vom Typ "Matt in zwei Zügen" ihre Schwierigkeit. Spiele, bei denen die Ungewissheit ganz auf den vielfältigen Zugmöglichkeiten beruht, werden kombinatorische Spiele genannt. Bekannte Vertreter dieser Klasse von Spielen sind Brettspiele wie Schach, Go, Mühle, Dame, Halma und Reversi. Zu den Spielen, die sowohl kombinatorische wie zufällige Elemente besitzen, gehören Backgammon und "Mensch ärgere dich nicht", wobei der kombinatorische Charakter beim Backgammon deutlich ausgeprägter ist als beim "Mensch ärgere dich nicht".
- 3. Eine dritte Ursache, die bei Spielern eine Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf verursachen kann, entsteht, wenn die Spieler unterschiedliche Informationen über den erreichten Spielstand besitzen und damit ein einzelner Spieler nicht unbedingt die Informationen hat, über die die Spieler insgesamt verfügen. So muss ein Pokerspieler seine Entscheidungen treffen, ohne dass er die Karten seiner Gegner kennt. Man könnte nun argumentieren, dass auch beim Backgammon gezogen werden muss, ohne die künftigen Würfelergebnisse zu kennen. Jedoch besteht zwischen Pokern und Backgammon ein gravierender Unterschied: Die weiteren Würfelergebnisse kennt kein Spieler, hingegen sind die bereits verteilten Karten einem Teil der Spieler bekannt jeder sieht zunächst nur seine eigenen Karten. Spiele, deren Teilnehmer vorwiegend aufgrund solcher imperfekter Information im Ungewissen über den weiteren Spielablauf sind, werden strategische Spiele genannt; in reiner Form sind sie allerdings sehr selten. Imperfekte Information ist ein typisches Element der meisten Kartenspiele wie Pokern, Skat und Bridge. Bei den Brettspielen Geister und Stratego beruht die imperfekte Information darauf, dass man zunächst nur den Ort, nicht aber den Typ der gegnerischen Steine kennt³. Bei Diplomacy⁴ und Papier-Stein-Schere⁵ ziehen die Spieler gleich-

Römische Zahlen I, II, ... weisen auf – zumeist umfangreichere – Anmerkungen am Ende des Buches hin

Die einfachen Regeln von Geister und eine kommentierte Partie findet man in Spielbox 1984/3, S. 37-39. Taktische Hinweise zu Stratego sind in Spielbox 1983/2, S. 37 f. beschrieben.

Geister und Stratego sind Brettspiele für zwei Personen, bei denen jeder Spieler von den Steinen seines Gegners nur die neutrale Rückseite sieht. Zunächst sind einem Spieler also nur die eigenen Spielsteine und die Positionen der gegnerischen Steine bekannt. Bei Geister, das auf einem Schachbrett mit je vier guten und schlechten Geistern auf beiden Seiten gespielt wird, werden nur die geschlagenen Figuren enttarnt. Bei Stratego ist die Schlagkraft einer Figur abhängig vom militärischen Rang. Daher muss eine Figur zum Zeitpunkt eines Schlagabtauschs dem Gegner offen gelegt werden.

Diplomacy ist ein Klassiker unter den Gesellschaftsspielen. Erfunden wurde es 1945 von Alan Calhamer. Unter Einschluss von Absprachen, die zwischen den Mitspielern getroffen werden können, sind entscheidende Regionen des Spielplans, der Europa vor dem Ersten Weltkrieg darstellt, unter eigene Kontrolle zu stellen. Der besondere Charakter von Diplomacy rührt daher, dass das Schließen und Aufkündigen von Bündnissen geheim gegenüber Dritten verhandelt werden kann. Einen Überblick über Diplomacy vermittelt ein Artikel in Spielbox 1983/2, S. 8-10 sowie ein vom Erfinder verfasstes Kapitel in David Pritchard (ed.), *Modern board games*, London 1975, S. 26-44.

zeitig, so dass jedem Spieler die Information über den aktuellen Zug der Gegner fehlt. Wie sich die imperfekte Information in einem Spiel konkret auswirkt, lässt sich am besten verdeutlichen, wenn die Spielregeln so abgeändert werden, dass ein neues Spiel mit perfekter Information entsteht. Bei Kartenspielen müssen dazu die Spieler ihre Karten offen auslegen; Poker würde auf diese Weise zur Farce, Skat bliebe immerhin ein kombinatorisch interessantes Spiel ähnlich der halb-offenen Zwei-Personen-Variante. Neben dem Spiel Papier-Stein-Schere, bei dem es sich um ein rein strategisches Spiel handelt, erkennt man auf diese Weise auch Pokern als ein überwiegend strategisches Spiel.



Bild 1 Die drei Ursachen der Ungewissheit in Gesellschaftsspielen: Gewonnen wird mit *Glück, Logik und Bluff*.

Zu fragen bleibt, ob die Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf noch auf anderen, bisher nicht erkannten Ursachen beruhen kann. Untersucht man eine Vielzahl von Spielen nach solchen Ursachen, dann stößt man im Wesentlichen auf die folgenden Erscheinungen:

- Das Ergebnis eines Spieles kann von der k\u00f6rperlichen Geschicklichkeit und Leistungsf\u00e4higkeit abh\u00e4ngen. Au\u00dber den Sport- und Computerspielen, die sicherlich nicht zu den Gesellschaftsspielen geh\u00f6ren, ist beispielsweise Mikado ein Spiel, das manuelle Geschicklichkeit erfordert.
- Die Spielregeln an sich können den Spielern zum Teil unklar sein. Insbesondere in der Lernphase komplizierter Spiele kommt es zu solchen Situationen. In anderen Fällen ergeben sich Zweifelsfälle zwangsläufig aus der Natur des Spiels. So kann es beim Kreuzworträtsel-artigen Spiel Scrabble unklar sein, ob ein Wort zulässig ist oder nicht. Und selbst beim Skat bleibt das in Altenburg tagende Skatgericht bei der Klärung von Streitfragen nicht unbeschäftigt, auch wenn es meist nur mit nebensächlichen Details befasst ist
- Ein unvollkommenes Gedächtnis vergrößert nicht nur beim Memory die persönliche Ungewissheit. Allerdings ist diese Art der Ungewissheit keine objektive Eigenschaft des betreffenden Spiels.

Im Vergleich zu Zufall, Kombinationsreichtum und unterschiedlichen Informationsständen können die zuletzt genannten Phänomene allesamt vernachlässigt werden. Keins von ihnen

Zwei Spieler entscheiden völlig frei, aber gleichzeitig für je eine der drei Alternativen "Papier", "Stein" oder "Schere". Haben beide Spieler die gleiche Wahl getroffen, endet die Partie unentschieden. Ansonsten übertrifft ("schleift") der "Stein" die "Schere", das "Papier" schlägt ("umwickelt") den "Stein", und die "Schere" übertrifft ("schneidet") das "Papier".

VIII Einführung

ist als typische und objektive Ursache für die Ungewissheit innerhalb eines Gesell-schaftsspiels anzusehen.

Spiel und Mathematik

Will ein Spieler die Gewinnaussichten zu seinen Gunsten verbessern, muss er zunächst versuchen, seine persönliche Ungewissheit möglichst weitgehend zu überwinden, um dann die Konsequenzen seiner möglichen Handlungen abzuwägen. Wie er dabei vorzugehen hat, hängt selbstverständlich davon ab, welche konkreten Ursachen für seine Ungewissheit verantwortlich sind: Will ein Spieler beispielsweise entscheiden, ob er an einem Glücksspiel teilnehmen soll oder nicht, dann muss er die Gewinnchancen dahingehend abschätzen, ob sie im Vergleich zum Einsatz attraktiv sind. Ein Schachspieler dagegen hat zu seinem ins Auge gefassten Zug alle möglichen Gegenzüge zu prüfen und zu jedem von ihnen mindestens eine erfolgreiche Antwort parat zu haben. Ein Pokerspieler schließlich muss versuchen zu ergründen, ob das hohe Gebot seines Gegners auf einem guten Blatt basiert oder ob es sich nur um einen Bluff handelt. Alle drei Probleme lassen sich nicht nur im Einzelfall spielerisch, sondern auch in prinzipieller Hinsicht untersuchen. Welche mathematische Methoden dafür entwickelt wurden, soll im vorliegenden Buch anhand von möglichst plakativen Beispielen vorgestellt werden:

- Glücksspiele können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert werden. Diese mathematische Disziplin, die heute in vielfältiger Weise in Natur-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften angewendet wird, verdankt sogar ihre Entstehung im 17. Jahrhundert dem Wunsch, die Gewinnchancen von Glücksspielen berechnen zu können.
- Für die kombinatorischen Elemente in Spielen gibt es keine einheitliche Theorie. Jedoch können mit den unterschiedlichsten mathematischen Methoden sowohl prinzipielle als auch für Einzelfälle konkrete Resultate erzielt werden.
- Ausgehend von den strategischen Komponenten eines Spieles wurde eine eigene mathematische Disziplin begründet, die so genannte Spieltheorie. Spiele fungieren dort als Modell, auf deren Basis interaktive, ökonomische Prozesse in Abhängigkeit von getroffenen Entscheidungen untersucht werden.

Für alle drei Spieltypen und ihre mathematischen Methoden gilt, dass mit Hilfe von Computern ansonsten unerreichbare Anwendungen realisiert werden können. Aber auch unabhängig von der Entwicklung immer schnellerer Computer hat es bei den betreffenden mathematischen Theorien im 20. Jahrhundert große Fortschritte gegeben. Das mag den einen oder anderen mathematischen Laien vielleicht überraschen – besitzt die Mathematik doch oft völlig zu unrecht den Ruf, ihre Entwicklung sei schon lange abgeschlossen.

Der Ausgangspunkt der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** liegt in Fragen wie derjenigen, welcher Spieler in einem Glücksspiel die besten Chancen hat zu gewinnen. Zentraler Begriff ist die Wahrscheinlichkeit, die als Maß für die Gewissheit interpretiert werden kann, mit der ein zufälliges Ereignis eintritt. Für Glücksspiele interessiert natürlich letztlich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass ein bestimmter Spieler gewinnt. Häufig muss aber nicht nur der Gewinn als solches, sondern zugleich auch seine Höhe berücksichtigt werden. Zu berechnen sind dann der durchschnittliche Gewinn und das mit dem Spiel verbundene Risiko. Aber

nicht immer muss ein Spiel vollständig analysiert werden, beispielsweise dann, wenn nur unterschiedliche Zugmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen sind und das im direkten Vergleich geschehen kann. Bei Wettrennen auf Würfelbasis stellen sich dabei Fragen der Art, wie lange ein Spielstein durchschnittlich dafür braucht, eine bestimmte Wegstrecke zurückzulegen. Besonders kompliziert sind solche Berechnungen dann, wenn wie beim Leiterspiel ein Spielstein auch wieder zurückfallen kann. Auch die Antwort auf die Frage nach der Bevorzugung von bestimmten Feldern beim Monopoly verlangt ähnliche Berechnungs-Techniken. Schwierig zu analysieren sind ebenso solche Glücksspiele, die ausgeprägte kombinatorische Spielelemente beinhalten. Erstmals bewältigt wurden solche Schwierigkeiten bei der Analyse des Black Jacks.

Kombinatorische Spiele, namentlich die traditionsreichen Vertreter Schach und Go, gelten als Spiele mit hohem intellektuellen Anspruch. Schon früh in der Entwicklungsgeschichte der Rechenmaschinen reifte daher der Wunsch heran, in Maschinen ebenbürtige Spielgegner finden zu können. Wie aber lässt sich das realisieren? Dafür benötigt werden Rechenverfahren, mit denen ausreichend gute Züge gefunden werden können. Kann die Güte eines Zuges aber überhaupt eindeutig bewertet werden oder hängt sie nicht immer von der gegnerischen Antwort ab? Immerhin ist der Suchverfahren und Computertechnik umfassende aktuelle Stand der Technik beeindruckend. Ein durchschnittlicher Schachspieler besitzt nämlich gegen die besseren Schachprogramme kaum noch eine Chance. Aber nicht nur Schach war Gegenstand des mathematischen Interesses. Für viele Spiele konnten, zum Teil auf überraschend einfache Weise, sichere Gewinnstrategien gefunden werden. Bei anderen Spielen kann seltsamerweise nur bestimmt werden, welcher Spieler theoretisch stets gewinnen kann, ohne dass bis heute eine Gewinnstrategie konkret bekannt ist. Einige dieser Spiele besitzen sogar Eigenschaften, die kaum eine Hoffnung bestehen lassen, je eine solche Gewinnstrategie zu finden.

In welcher Weise sich strategische Spiele prinzipiell von zufälligen und kombinatorischen Spielen unterscheiden, davon handeln die Grundlagen der **Spieltheorie**. Am Beginn steht eine mathematisch formale Definition eines Spiels. Charakterisiert wird ein Spiel durch seine Regeln, und diese umfassen die folgenden Angaben:

- Die Anzahl der Mitspieler.
- Zu jedem Spielstand die Aussage darüber,
 - wer am Zug ist,
 - welche Zugmöglichkeiten für den betreffenden Spieler bestehen und
 - auf Basis welcher Informationen er seine Entscheidung zu treffen hat.
- Für beendete Partien, wer wie viel gewonnen hat.
- Bei Zufallszügen, wie wahrscheinlich die möglichen Ergebnisse sind.

Als eigenständige Disziplin entstand die Spieltheorie erst 1944, als fast aus dem Nichts eine monumentale Monographie über die Theorie der Spiele erschien. Auch wenn sich dieses Werk an verschiedenen Stellen Spielen wie Schach, Bridge und Pokern widmet, sind für die Spieltheorie wirkliche Gesellschaftsspiele im Vergleich zu ökonomischen Prozessen eigentlich nachrangig. Dass sich Spiele überhaupt als Modell für reale Abläufe eignen, überrascht eigentlich nicht. Schließlich sind viele Spielelemente Konflikten um Geld, Macht oder gar Leben entlehnt. Insofern bietet sich die "Umkehrung" geradezu an, dass heißt, die Interaktion von Individuen – ob in Konkurrenz oder in Kooperation – auf der Basis eines an Spielen angelehnten Modells zu beschreiben und zu untersuchen. Die weitgehende Idealisierung ist

X Einführung

dabei genauso unvermeidbar, wie es bei anderen Modellen der Fall ist, etwa wenn in der Physik eine Masse als auf einen Punkt konzentriert angenommen wird.

Über dieses Buch

Entsprechend der beschriebenen Systematik gliedert sich der nachfolgende Text in drei Teile, in denen nacheinander zufällige, kombinatorische und strategische Spielelemente mathematisch untersucht werden. Jeder der drei Teile umfasst mehrere Kapitel, die jeweils ein abgegrenztes Problem – meist ein einzelnes Spiel oder Spielelement – zum Gegenstand haben.

Um einen möglichst breiten Leserkreis erreichen zu können, wurde bewusst von einer Darstellung abgesehen, wie sie im Hinblick auf Allgemeinheit, Formalismus und Vollständigkeit in Lehrbüchern üblich und angebracht ist. Wie in meinen beiden Büchern Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie und Statistik – wie und warum sie funktioniert stehen vielmehr Ideen, Begriffe und Techniken im Blickpunkt, die soweit vermittelt werden, dass sie auf andere Spiele übertragen werden können.

Aufgrund der problemorientierten Themenauswahl differiert das mathematische Niveau bei den verschiedenen Kapiteln zum Teil erheblich. Obwohl Bezüge auf vorangegangene Kapitel zahlreich sind, können die Kapitel oft unabhängig voneinander gelesen werden. Jedes Kapitel beginnt mit einer, manchmal mehr oder weniger rhetorisch gemeinten Frage, die zugleich Natur und Schwierigkeit des im betreffenden Kapitel behandelten Problems offenbart. Dem (der) mathematisch bestens vorgebildeten Leser(in)⁶, für den (die) der hier gebotene Überblick in vielen Fällen zu oberflächlich und unvollständig bleiben muss, ermöglicht diese Struktur eine schnelle und gezielte Auswahl der für ihn (sie) interessanten Teile – die angegebene Fachliteratur weist den weiteren Weg. Ebenso zum Weiterlesen anregen sollen die angeführten Zitate sowie die Ausblicke auf mathematische Hintergründe und verwandte, außerhalb des eigentlichen Themenbereichs liegende Probleme und Sachverhalte.

Deutlichen Wert gelegt wird auf die historische Entwicklung, und zwar zum einen, weil zumindest der jüngere Aufschwung der Mathematik weit weniger bekannt ist als der der Naturwissenschaften, zum anderen, weil es durchaus spannend sein kann, persönlichen Irrtum und Erkenntnisgewinn der zeitraffermäßig verkürzten Entwicklung zuordnen zu können. Wie stark die mathematische Forschung auch im – nicht unbedingt repräsentativen – Bereich der Spiele gerade in den letzten Jahrzehnten vorangeschritten ist, macht ein Vergleich mit thematisch ähnlich abgegrenzten, im Detail allerdings oft anders ausgerichteten Zusammenstellungen deutlich, deren Erscheinen vor der Entdeckung vieler der hier beschriebenen Ergebnisse datiert ist:

Der Spieler, der Verlierer, sein fehlerhafter Zug – alle diese Bezeichnungen sind im folgenden genauso wenig geschlechtsspezifisch gemeint wie der Hund, die Katze und das Pferd. Die Möglichkeit, mathematisch-formal in dem Spieler nicht eine Person, sondern auch in grammatikalischer Sicht geschlechtsneutral das Element einer entsprechenden Menge zu sehen, erschien unter dem Blickwinkel der Verständlichkeit genauso wenig sinnvoll wie der ständige Gebrauch doppelter Genera.

- René de Possel, Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion, Paris 1936, Reprint in: Hevre Moulin, Fondation de la théorie des jeux, Paris 1979
- R. Vogelsang, Die mathematische Theorie der Spiele, Bonn 1963;
- N. N. Worobjow, *Die Entwicklung der Spieltheorie*, Berlin (-Ost) 1975 (russ. Orig. 1973)
 Hauptgegenstand ist die Spieltheorie als mathematische Disziplin, jedoch wird für die Theorien von Glücksspielen, kombinatorischen und strategischen Spielen in I. §§2-5 ein Abriss der historischen Entwicklung gegeben⁷;
- Richard A. Epstein, The theory of gambling and statistical logic, New York 1967 (erweiterte Neuauflage 1977);
- Edward Packel, *The mathematics of games and gambling*, Washington 1981.
- John D. Basley, *The mathematics of games*, Oxford 1989.
- La mathématique des jeux, Bibliothèque pour La Science, Paris 1997 Beiträge zum Thema Spiel und Mathematik der französischen Ausgabe von Scientific American, die nur zum Teil auch in anderen Länderausgaben veröffentlicht wurden.

Nicht versäumen möchte ich es, meinen Dank an all jene auszusprechen, die bei der Entstehung dieses Buchs behilflich waren: Elwyn Berlekamp, Richard Bishop, Olof Hanner, Julian Henny, Daphne Koller, Martin Müller, Bernhard von Stengel und Baris Tan erläuterten mir freundlicherweise ihre Forschungsergebnisse. Bernhard von Stengel verdanke ich darüber hinaus einige Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge und nicht zuletzt die Ermutigung, den Weg zu einer Publikation zu suchen. Angesichts des umfangreichen Quellenstudiums nicht vergessen werden soll die mir zuteil gewordene Unterstützung durch Mitarbeiter der von mir genutzten Bibliotheken - stellvertretend auch für die anderen seien hier nur die Bibliothek des Mathematischen Instituts in Bonn, die Bibliothek des Instituts für Diskrete Mathematik in Bonn sowie die Universitätsbibliotheken Bonn und Bielefeld genannt. Frauke Schindler vom Lektorat des Vieweg-Verlages und Karin Buckler haben viel dazu beigetragen, die Zahl meiner Fehler zu verringern. Dem Vieweg-Verlag, namentlich seiner Programmleiterin Ulrike Schmickler-Hirzebruch, habe ich dafür zu danken, diese sicher aus dem üblichen Rahmen fallende Zusammenstellung ins Verlagsprogramm aufgenommen zu haben. Last not least gilt mein ganz besonderer Dank meiner Frau Claudia, deren Verständnis ich in den letzten Jahren leider viel zu oft strapaziert habe.

Vorwort zur zweiten Auflage

Der erfreuliche Umstand, dass die erste Auflage nach nur zwei Jahren vergriffen ist, gibt mir Gelegenheit, zwischenzeitlich entdeckte Druckfehler zu beseitigen. Außerdem konnten einige Literaturverweise und Hinweise auf neuere Untersuchungen ergänzt werden. Danken möchte ich Hans Riedwyl, Jürg Nievergelt und Aviezri S. Fraenkel für ihre Anmerkungen.

Hinweisen möchte ich schließlich noch auf meine Web-Seite www.bewersdorff-online.de, auf der ich Ergänzungen und Korrekturen veröffentliche.

Darüber hinaus verdankt der Autor den Ausführungen Worobjows aus Teil I wesentliche Einsichten, wie sie insbesondere auch in die Einführung eingeflossen sind.

XII Einführung

Vorwort zur dritten Auflage

Wieder habe ich aufmerksamen Lesern zu danken, die mich freundlicherweise auf Druckfehler in vorangegangenen Auflagen hingewiesen haben: Pierre Basieux, Ingo Briese, Dagmar Hortmeyer, Jörg Klute, Norbert Marrek, Ralph Rothemund, Robert Schnitter und Alexander Steinhansens. In dieser Hinsicht besonders danken möchte ich David Kramer, der derzeit das vorliegende Buch ins Englische übersetzt.

Die Notwendigkeit zu inhaltlichen Ergänzungen ergaben sich aufgrund von einigen zwischenzeitlich publizierten Arbeiten, darunter insbesondere Dean Allemangs Untersuchung über die Misère-Version von Nim-Spielen sowie Elwyn Berlekamps Idee des Environmental Go. Auch der Anregung von Lesern, neuere Ansätze bei Spielbaum-Suchverfahren zu ergänzen, habe ich gerne entsprochen.

Vorwort zur vierten Auflage

Für Hinweise auf Druckfehler habe ich diesmal Benno Grabinger und nochmals David Kramer zu danken. Ergänzt wurde ein Überblick über neue Ansätze zur Untersuchung der Misère-Version von Nim-Spielen, die Thane Plambeck 2005 veröffentlicht hat.

Vorwort zur fünften Auflage

Für Hinweise auf Druckfehler danke ich Winfried Borchardt, Wolfgang Götz und Sophie Rabe. Ergänzt wurden neuere Ergebnisse über die amerikanische Dame-Variante sowie ein Überblick über Machine-Learning- und Monte-Carlo-Ansätze bei der Spielbaumsuche.

Vorwort zur sechsten Auflage

Für Hinweise auf Unzulänglichkeiten danke ich Frank Diekmann, Donald Knuth, Horst Rödel und Walter Schmucker. Ergänzt wurden Erläuterungen zu Zwischenschritten bei der Berechnung von Black Jack sowie neuere spieltheoretische Resultate über Mastermind.

JÖRG BEWERSDORFF⁸

Unter mail@bewersdorff-online.de sind Hinweise auf Fehler und Unzulänglichkeiten willkommen. Auch Fragen werden, soweit es mir möglich ist, gerne beantwortet.

Inhaltsverzeichnis

Ei	nführ	ung	V
	Die U	Ingewissheit im Gesellschaftsspiel	V
	Spiel	und Mathematik	VII
	Über	dieses Buch	X
	Vorw	ort zur zweiten Auflage	X
	Vorw	ort zur dritten Auflage	XI
	Vorw	ort zur vierten Auflage	XI
	Vorw	ort zur fünften Auflage	XI
	Vorw	ort zur sechsten Auflage	XI
1	Glüc	ksspiele	1
	1.1	Würfel und Wahrscheinlichkeit	1
	1.2	Warten auf die Doppel-Sechs	4
	1.3	Lottotipps – "gleicher als gleich"?	7
	1.4	Gerecht teilen – aber wie?	14
	1.5	Rot und Schwarz – das Gesetz der großen Zahlen	17
	1.6	Unsymmetrische Würfel: Brauchbar oder nicht?	22
	1.7	Wahrscheinlichkeit und Geometrie	25
	1.8	Zufall und mathematische Bestimmtheit – unvereinbar?	27
	1.9	Die Suche nach dem Gleichmöglichen	34
	1.10	Gewinne im Spiel: Wahrscheinlichkeit und Wert	38
	1.11	Welcher Würfel ist der beste?	44
	1.12	Ein Würfel wird getestet	46
	1.13	Die Normalverteilung: Wie lange noch zum Ziel?	51
	1.14	Nicht nur beim Roulette: Die Poisson-Verteilung	59
	1.15	Wenn Formeln zu kompliziert sind: Die Monte-Carlo-Methode	62
	1.16	Markow-Ketten und Monopoly	69
	1.17	Black Jack: Ein Märchen aus Las Vegas	81
2	Kom	hinatorische Spiele	95

XIV Inhaltsverzeichnis

	2.1	Welcher Zug ist der beste?	95
	2.2	Gewinnaussichten und Symmetrie	103
	2.3	Ein Spiel zu dritt	112
	2.4	Nim: Gewinnen kann ganz einfach sein!	117
	2.5	Lasker-Nim: Gewinn auf verborgenem Weg	120
	2.6	Schwarz-Weiß-Nim: Jeder zieht mit seinen Steinen	127
	2.7	Ein Spiel mit Domino-Steinen: Wie lange ist noch Platz?	139
	2.8	Go: Klassisches Spiel mit moderner Theorie	148
	2.9	Misère-Spiele: Verlieren will gelernt sein!	169
	2.10	Der Computer als Spielpartner	178
	2.11	Gewinnaussichten – immer berechenbar?	198
	2.12	Spiele und Komplexität: Wenn Berechnungen zu lange dauern	208
	2.13	Memory: Gutes Gedächtnis und Glück – sonst nichts?	218
	2.14	Backgammon: Doppeln oder nicht?	224
	2.15	Mastermind: Auf Nummer sicher	238
3	Strat	egische Spiele	246
	3.1	Papier-Stein-Schere: Die unbekannten Pläne des Gegners	246
	3.2	Minimax kontra Psychologie: Selbst beim Pokern?	253
	3.3	Poker-Bluff: Auch ohne Psychologie?	260
	3.4	Symmetrische Spiele: Nachteile sind vermeidbar, aber wie?	264
	3.5	Minimax und Lineare Optimierung: So einfach wie möglich	274
	3.6	Play it again: Aus Erfahrung klug?	280
	3.7	Le Her: Tauschen oder nicht?	284
	3.8	Zufällig entscheiden – aber wie?	289
	3.9	Optimal handeln – effizient geplant	296
	3.10	Baccarat: Ziehen bei Fünf?	308
	3.11	Pokern zu dritt: Vertrauenssache?	311
	3.12	"QUAAK!" – (k)ein Kinderspiel	320
	3.13	Mastermind: Farbcodes und Minimax	327
Aı	nmerk	ungen	332
C+	ichwa	rtvorzojehnie	366

1.1 Würfel und Wahrscheinlichkeit

Mit einem Würfelpaar kann die Summe 10 durch 5+5 oder 6+4 erreicht werden. Auch die Summe 5 lässt sich auf zwei Arten, nämlich durch 1+4 oder 2+3, erzielen. Trotzdem tritt die Würfelsumme 5 in längeren Versuchsreihen erfahrungsgemäß häufiger als die 10 auf. Warum?

Obwohl wir in unserer Umgebung in vielfältiger Weise dem Zufall ausgesetzt sind, waren es maßgeblich Fragen über Glücksspiele, die zu den ersten mathematischen Untersuchungen von zufälligen Erscheinungen führten. Abgesehen davon, dass es höchst attraktiv sein kann, Wege zum Gewinn zu suchen und zu finden, haben Glücksspiele auch den Vorteil, dass bei ihnen der Zufall in genau fixierten Bahnen wirkt. So ist die zufallsbedingte Ungewissheit, eine Sechs zu werfen, einfacher erfassbar als wenn es darum geht, ob am 12. Juli des nächsten Jahres ein Blitz in den Eiffelturm einschlagen wird. Das liegt in erster Linie daran, dass Glücksspiele unter gleichen Bedingungen reproduzierbar sind und theoretische Ergebnisse daher relativ einfach in Versuchsreihen überprüft werden können, wenn sie nicht ohnehin schon als Erfahrungstatsache bekannt sind.

Die ersten systematischen Untersuchungen von Glücksspielen stammen aus der Mitte des 17. Jahrhunderts. Punktuelle Untersuchungen gab es allerdings schon vorher. So wurde bereits im 13. Jahrhundert das eingangs gestellte Problem der Augensummen von Würfeln korrekt gelöst⁹, was insofern eine besondere Beachtung verdient, da aus den nachfolgenden Jahrhunderten mehrere fehlerhafte Analysen zum gleichen Thema bekannt sind. Einen universellen Ansatz zur Beschreibung zufälliger Probleme schuf zuerst Jakob Bernoulli (1654-1705) mit seiner *Ars coniectandi*, der Kunst des Vermutens. Ihr Gegenstand ist es nach Bernoulli, "so genau wie möglich die Wahrscheinlichkeit der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urteilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder ratsamer erscheint"¹⁰. Im Auge hatte er dabei nicht nur Glücksspiele sondern auch Probleme des Alltags. Bernoullis Anspruch an eine mathematische Theorie des Zufalls ist noch heute aktuell. So formulierte der bekannte Physiker Richard Feynman (1918-1988) in kaum übertreffbarer Schlichtheit: "Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist ein System, das uns beim Raten hilft".

R. Ineichen, Das Problem der drei Würfel in der Vorgeschichte der Stochastik, Elemente der Mathematik, 42 (1987), S. 69-75; Ivo Schneider, Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933, Darmstadt 1988, S. 1 und S. 5-8 (kommentierte Quellen). Einen historischen Überblick der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man auch im Anhang des Lehrbuchs B. W. Gnedenko, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin 1991.

¹⁰ Siehe dazu den umfassenden Nachdruck Jakob Bernoulli, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 107, Frankfurt/M. 1999, S. 233.

Zentrale Bedeutung in Bernoullis Theorie besitzt der Begriff der **Wahrscheinlichkeit**, nach Bernoulli ein "Grad von Gewissheit". Ausgedrückt wird dieser Grad an Gewissheit durch eine Zahl. Wie eine Länge misst auch die Wahrscheinlichkeit etwas, aber was genau und wovon überhaupt? Das heißt, was für Objekte werden gemessen, und welche Ausprägung von ihnen ist Gegenstand der Messung?

Nehmen wir zunächst einen einzelnen Würfel. Über ein einzelnes Würfelergebnis sind Aussagen möglich wie "Das Würfelergebnis ist gleich 5" oder "Die geworfene Zahl ist höchstens gleich 3". Je nach Wurf kann eine solche Aussage wahr oder unwahr sein. Anders ausgedrückt: Das durch die Aussage beschriebene **Ereignis** kann bei einem einzelnen Versuch eintreten oder auch nicht. Dabei tritt der Extremfall des unmöglichen Ereignisses, welches beispielsweise durch die Aussage "Das Würfelergebnis ist gleich 7" repräsentiert wird, nie ein. Dagegen tritt das absolut sichere Ereignis, beschrieben etwa durch die Aussage "Die geworfene Zahl liegt zwischen 1 und 6", in jedem Versuch ein.

Die Ereignisse sind nun die Objekte, die mit den Wahrscheinlichkeiten gemessen werden. Gemessen wird bei einem Ereignis die Gewissheit oder Sicherheit, mit der es in einem einzelnen Versuch eintreten kann.

Wie aber lässt sich diese Sicherheit messen? Messen heißt vergleichen, so messen wir Längen dadurch, dass wir sie mit einem Maßstab, etwa einem Lineal, vergleichen. Bei den Wahrscheinlichkeiten ist das nicht so einfach. Zum einen sind die zu messenden Objekte nicht materiell, zum anderen ist die zu messende Ausprägung, im Gegensatz zu Größen wie Geschwindigkeit, Temperatur oder Helligkeit, nicht direkt wahrnehmbar. Immerhin ist intuitiv klar, wie man die Sicherheit eines Ereignisses abschätzen kann: Man schreitet zur Tat, das heißt, man würfelt, und zwar möglichst oft! Je höher dabei der Anteil der Würfe ist, bei denen das Ereignis eintritt, als desto sicherer ist der Eintritt des Ereignisse in einem einzelnen Versuch anzusehen. Zahlenmäßig wird der gemessene Anteil durch die so genannte relative Häufigkeit erfasst, bei der die Zahl der Eintritte durch die Gesamtzahl der Würfe geteilt wird. Ergeben beispielsweise von 6000 Würfen 2029 Würfe mindestens eine Fünf, dann entspricht das einer relativen Häufigkeit von 2029/6000 = 0,338. Die Sicherheit, mindestens eine Fünf zu würfeln, ist damit gemessen, das Messergebnis lautet 0,338. Eine erneute Messung mit derselben oder einer anderen Wurfzahl würde kaum das gleiche, vermutlich aber ein ähnliches Ergebnis erbringen. Ein endgültiger Wert ist aber so nicht zu erhalten, und selbst die Angabe einer Messgenauigkeit ist bereits problematisch. Eindeutig messbar sind nur das absolut sichere Ereignis, das immer die relative Häufigkeit 1 besitzt, sowie das unmögliche Ereignis, für das sich stets die relative Häufigkeit 0 ergibt.

Will man bei unterschiedlichen Ereignissen die Sicherheit vergleichen, mit der sie eintreten, dann muss das nicht unbedingt experimentell geschehen. Möglich ist es vielmehr auch, Symmetrien zu berücksichtigen: So wie die sechs Flächen des Würfels geometrisch vollkommen gleichwertig sind, so ist es nahe liegend, den Eintritt der entsprechenden Ereignisse als gleich sicher anzusehen, das heißt, den sechs Wurfergebnissen die gleiche Wahrscheinlichkeit zu unterstellen. Auf einer Wahrscheinlichkeits-Messskala, die wie bei den relativen Häufigkeiten von der 0 des unmöglichen Ereignisses bis zur 1 des absolut sicheren Ereignisses reicht, ergeben sich dann für die sechs Wurfergebnisse, von denen immer genau eines eintritt, die Wahrscheinlichkeiten 1/6. Bernoulli begründete dies mit den Worten: "Wahrscheinlichkeit ist nämlich der Grad an der Unsicherheit, und sie unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen."

Das Ereignis, mindestens eine Fünf zu werfen, umfasst die Würfelergebnisse Fünf und Sechs. Folglich wird ihr die Wahrscheinlichkeit 2/6 = 1/3 zugeordnet. Das Ereignis, eine gerade Zahl zu werfen, erhält entsprechend die Wahrscheinlichkeit 3/6 = 1/2.

Wahrscheinlichkeiten lassen sich immer dann wie beim Würfel finden, wenn ein System gleichmöglicher Fälle vorliegt. Pierre Simon Laplace (1749-1824) erklärte 1812 in seinem *Essai philosophique sur les probabilités* Fälle dann für gleichmöglich, wenn "wir über deren Eintreffen in der gleichen Ungewissheit sind" und "keinen Grund zu glauben haben, dass einer dieser Fälle eher eintreten werde als der andere". Sind die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments in diesem Sinne "gleichmöglich", dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nach Laplace wie folgt definierbar: Die Anzahl der Fälle, bei denen das Ereignis eintritt, das heißt, die "günstig" für das Ereignis sind, geteilt durch die Gesamtzahl der möglichen Fälle. Ist A ein Ereignis, dann entspricht die Definition von Laplace der Formel

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A = \frac{Anzahl der für A günstigen Fälle}{Gesamtzahl der möglichen Fälle}$

Auf die engen Beziehungen zwischen den relativen Häufigkeiten innerhalb einer Versuchsreihe und den Wahrscheinlichkeiten wurde bereits hingewiesen: Beide verwenden die Maßskala von 0 bis 1, und bei dem unmöglichen und dem absolut sicheren Ereignis sind ihre Werte immer gleich. Verläuft eine Versuchsreihe "ideal" in dem Sinne, das gleichmögliche Fälle gleichhäufig eintreten, dann stimmen relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sogar völlig überein. Bernoulli entdeckte aber noch eine weit interessantere Beziehung, das so genannte Gesetz der großen Zahlen. Es besagt, dass bei langen Versuchsreihen die relativen Häufigkeiten ungefähr gleich den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind. Dies ist zugleich die Bestätigung dafür, dass Wahrscheinlichkeiten bei Ereignissen wirklich die Sicherheit messen, wie man sie intuitiv versteht. Übersteigt beispielsweise bei einem Spiel die Gewinnwahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes, dann wird man bei genügend langem Spiel öfter gewinnen als verlieren. Bernoullis Gesetz der großen Zahlen macht sogar Aussagen darüber, wie genau Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten übereinstimmen. Wir werden darauf noch zurückkommen.

2. Würfel 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

 Tabelle 1
 Die 36 Kombinationen von zwei Würfeln

Bei einem Würfel ist die Symmetrie der Grund dafür, dass die sechs Werte als gleichmöglich und damit gleichwahrscheinlich angesehen werden können. Es gibt eben keinen Grund dafür, dass – im Sinne von Laplace – ein Würfelwert eher erreicht würde als ein anderer. Bei zwei Würfeln gibt es insgesamt 36 Kombinationen der beiden Würfelwerte. Wichtig ist – und das war in der anfänglichen Fragestellung unterlassen worden –, dass Würfelkombinationen wie 2-3 und 3-2 unterschieden werden! In der Praxis ist der Unterschied zwar häufig nicht zu erkennen, etwa dann, wenn zwei gleichartige Würfel aus einem Becher geworfen werden.

suchszahl entsprechend der geringer gewordenen Wahrscheinlichkeit zu vervielfachen, ist damit unzulässig.

De Méré, der sich sein "Pech" nicht erklären konnte, wandte sich 1654 Hilfe suchend an den schon zitierten Pascal. Pascal, der damals einen Briefwechsel mit seinem Kollegen Pierre de Fermat (1601-1665) über Gewinnchancen in Glücksspielen führte, nahm de Mérés Problem darin auf. So blieb die Episode zusammen mit einem Teil der Briefe der Nachwelt überliefert¹¹. Allgemein gilt der Briefwechsel heute als die Geburtsstunde der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch wenn eine einheitliche Theorie, in deren Mittelpunkt der Begriff der Wahrscheinlichkeit steht, erst später durch Jakob Bernoulli ersonnen wurde. De Mérés Problem bereitete Pascal und Fermat übrigens keine Schwierigkeiten. Eine Erklärung für de Mérés Beobachtung ergibt sich nämlich einfach dadurch, dass man die Zahl der insgesamt möglichen Fälle mit derjenigen Zahl von Fällen vergleicht, bei denen gewonnen wird:

So gibt es insgesamt 6.6.6.6 = 1296 Möglichkeiten, vier Würfelergebnisse miteinander zu kombinieren. Im Sinne von Laplace sind alle 1296 Würfelergebnisse gleichmöglich und daher gleichwahrscheinlich. Verloren wird, wenn keine Sechs geworfen wird. Dafür gibt es für jeden Wurf fünf Möglichkeiten, was insgesamt 5.5.5.5 = 625 Verlustkombinationen ergibt. Ihnen entgegen stehen 1296 - 625 = 671 Gewinnkombinationen, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes mit 671/1296 = 0,518 etwas größer ausfällt als die Verlustwahrscheinlichkeit, die nur 625/1296 = 0,482 beträgt.

Bei 24 Würfen mit zwei Würfeln gibt es astronomisch viele Möglichkeiten, nämlich 36^{24} , das ist eine immerhin 38-stellige Zahl! Die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes beträgt $35^{24}/36^{24}$, einfacher zu berechnen in der Form $(35/36)^{24} = 0,5086$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist diesmal kleiner, nämlich gleich 0,4914, genau wie es de Méré erfahren musste.

Die auf Laplace zurückgehende Wahrscheinlichkeitsformel, bei der die Anzahl der für ein Ereignis günstigen Fälle durch die Gesamtzahl aller Fälle geteilt wird, ist zwar im Prinzip sehr einfach, jedoch erweist sie sich in der Praxis oft als unhandlich, etwa wenn es wie im Beispiel astronomisch viele Kombinationsmöglichkeiten gibt. In solchen und ähnlichen Situationen ist es praktischer, die Formeln des so genannten Multipliaktions- beziehungsweise Additionsgesetzes zu verwenden. Beide Gesetze machen für Ereignisse, die in einem logischen Zusammenhang zueinander stehen, Aussagen über deren Wahrscheinlichkeiten. So lautet das **Multiplikationsgesetz** für unabhängige Ereignisse:

Beeinflusst der Eintritt oder Nicht-Eintritt eines Ereignisses nicht die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses – man nennt diese dann **unabhängig** voneinander –, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfelpaar zwei gerade Zahlen zu werfen, gleich $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Natürlich erhält man das Resultat auch, wenn man die Zahl der günstigen Würfelkombinationen bestimmt: Bei einem einzelnen Würfel wird eine gerade Zahl mit der Wahrscheinlichkeit 1/2, das heißt in 3 von 6 Fällen, erreicht. Damit sind bei $3 \cdot 3 = 9$ der 36 gleichwahrscheinlichen Würfelkombinationen beide Werte gerade, was die Wahrscheinlichkeit 9/36 = 1/4 ergibt. Wichtig ist, dass die günstigen Fälle beider Ereignisse nur deshalb zu gleichwahrscheinlichen Ergebnissen kombiniert werden können, weil sich die beiden Würfel gegenseitig nicht beeinflussen.

¹¹ Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 3 f. und S. 25-40.

Würfelt man einmal mit einem Würfelpaar, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, keine Doppel-Sechs zu erzielen, 35/36. Dass in 24 Versuchen nie eine Doppel-Sechs erscheint, ist daher aufgrund des Multiplikationsgesetzes mit der Wahrscheinlichkeit (35/36)²⁴ zu erwarten. Wie erhält man nun aus dieser Verlustwahrscheinlichkeit die gesuchte Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn? Dabei hilft das **Additionsgesetz**, das folgendermaßen lautet:

Schließen sich zwei Ereignisse gegenseitig aus, das heißt, können die beiden Ereignisse in einem Versuch keinesfalls beide eintreten, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ereignisse eintritt, gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine gerade Zahl oder eine Fünf zu werfen, gleich 3/6+1/6=4/6=2/3. Gewürfelt werden kann nämlich sowohl eine Zwei, Vier oder Sechs, als auch eine Fünf. So wie die Anzahlen der günstigen Fälle zu addieren sind, so müssen auch die Wahrscheinlichkeiten addiert werden. Ein Sonderfall des Additionsgesetzes liegt dann vor, wenn die beiden Ereignisse zueinander komplementär sind, das heißt, sich einerseits gegenseitig ausschließen und andererseits zum sicheren Ereignis ergänzen. Die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten ist immer gleich 1. Folglich ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, in 24 Versuchen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppel-Sechs zu werfen, gleich $1-(35/36)^{24}$.

Mit Hilfe von Additions- und Multiplikationsgesetz ist noch ein interessanter Ausblick auf die allgemeine Situation des de Méré'schen Problems möglich: Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich p, so ergibt sich bei einer Versuchsreihe von m Versuchen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis mindestens einmal eintritt, mittels der Formel 1 - (1 - p)^m. Um eine günstige Gewinnaussicht zu erhalten, muss dieser Wert mindestens gleich ½ sein. Das trifft dann zu, wenn die Anzahl m der Versuche mindestens

$$\frac{\ln 2}{-\ln(1-p)}$$

beträgt¹². Näherungsweise ist dieser Bruch gleich ln 2 /p mit dem natürlichen Logarithmus ln 2 = 0,6931..., wobei sich der exakte Wert ergibt, wenn zusätzlich noch durch $1+p/2+p^2/3+p^3/4+...$ geteilt wird¹³. Diese Korrektur ist insbesondere dann wichtig, wenn die Wahrscheinlichkeit p nicht allzu klein ist. Beispielsweise ist bei der Wahrscheinlichkeit von p = 1/6 durch 1,094 zu teilen. Hingegen kann bei kleineren Wahrscheinlichkeiten problemlos die Näherung ln 2 /p verwendet werden, so dass die notwendige Versuchszahl etwa umgekehrt proportional mit der Wahrscheinlichkeit wächst – so, wie es de Méré als allgemeines Gesetz anscheinend fast selbstverständlich voraussetzte.

Völlig abwegig war de Mérés Intuition also nicht. Zudem wurde sein Trugschluss in späterer Zeit noch oft übertroffen. Unter anderem wird nicht selten vermutet, bereits bei drei Versuchen mit einem Würfel beziehungsweise bei 18 Versuchen mit einem Würfelpaar betrage die Chance auf einen Treffer, das heißt eine Sechs beziehungsweise Doppel-Sechs, bereits 50%. Dabei wird schlicht übersehen, dass einige Würfelergebnisse im Verlauf der 18 Versuche mehrfach auftreten können, so dass dann insgesamt weniger als die Hälfte der mög-

$$\ln(1-p) = -p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} - \dots$$

Die Bedingung $1 - (1 - p)^m \ge \frac{1}{2}$ wird dazu in der Form $(1 - p)^m \le \frac{1}{2}$ logarithmiert. Zu beachten ist, dass beide Logarithmen negativ sind.

¹³ Die Potenzreihe des natürlichen Logarithmus beträgt

1.3 Lottotipps – "gleicher als gleich"?

Eine statistische Auswertung der insgesamt 1433 deutschen Lotto-Ausspielungen, die vom Oktober 1955 bis Anfang 1983 erfolgten, ergibt, dass – ohne Berücksichtigung der Zusatzzahlen – bei 76,4% der Ausspielungen mindestens eine der Zahlen von 1 bis 10 gezogen wurde. Getippte Zahlenreihen, die keine der Zahlen 1 bis 10 enthielten, hatten also allein aufgrund dieser Tatsache in 76,4% der Fälle keine Chance, einen Haupttreffer mit "Sechs Richtigen" zu erzielen. Sollte man deshalb immer mindestens eine der Zahlen 1 bis 10 in seinem Lotto-Tipp berücksichtigen?

Das Zahlenlotto, das in Deutschland und in einigen anderen Ländern in der Form "6 aus 49" gespielt wird, gehört heute zu den populärsten Glücksspielen. Und das nicht nur beim Publikum, sondern auch beim Staat, dessen Gewinn in der ungefähren Höhe des halben Einsatzes schon vor der Ziehung sicher ist. Entstanden ist das Lotto übrigens im 16. Jahrhundert in der Stadt Genua, wo damals jährlich fünf Senatoren per Los bestimmt wurden. Gleichzeitig konnte auf die zur Auswahl stehenden 110 Namen gewettet werden. Mit der Zeit verselbstständigte sich das Spiel und wurde dabei abstrahiert. Statt auf Namen setzte man nun auf Zahlen. Dem Siegeszug des Lottos konnten sich selbst die Regierungen des ehemaligen Ostblocks nicht entziehen¹⁵. Auch dort wurde das ursprünglich als kapitalistisch gebrandmarkte Spiel veranstaltet.

Aufgrund seiner Beliebtheit wurde das Lotto auch zum Gegenstand vieler Publikationen. In einem Lotto-Buch¹⁶ wird die in der Fragestellung zitierte Auswertung wie folgt kommentiert:

So gesehen muß man feststellen, daß Lotto eigentlich unlogisch ist. Wenn man darüber nachdenkt, ist es ganz einfach. Es haben nicht alle Zahlen beziehungsweise alle möglichen "Anfangszahlen"¹⁷, die von 1 bis 44, die gleichen Chancen.

Weil das so ist, haben nicht alle Tippreihen im Lottospiel die gleichen Chancen.

... wer Lotto spielt und dabei Reihen zusammenstellt, die mit einer Anfangszahl 11 und höher beginnen, verschenkt mehr als drei Viertel der Chancen, einen Sechser zu treffen. Selbst dann, wenn das Glück ihm eigentlich hold wäre. Er kann den Sechser deshalb nur

¹⁴ John Scarne, Complete guide to gambling, New York 1974, S. 16.

Die Entwicklung des Lottos in der DDR wird beschrieben in Wolfgang Paul, Erspieltes Glück – 500 Jahre Geschichte der Lotterien und des Lotto, Berlin 1978, S. 190-192.

¹⁶ Rolf B. Alexander, Das Taschenbuch vom Lotto, München 1983; Zitate: S. 26, S. 68 f.

¹⁷ Mit "Anfangszahl" ist die kleinste Zahl einer getippten Sechser-Reihe gemeint.

in einem knappen Viertel aller Ausspielungen treffen, weil seine Spielreihe nach der Formel "6 aus 49" schlicht unvollständig ist. Der Spieler, der hohe Anfangszahlen für seine Reihe wagt, gleicht dem Lotteriespieler, der mit einem Viertellos die auf ein ganzes Los entfallende Million gewinnen will. Er kann sie einfach nicht bekommen.

Fast ist man geneigt, den Argumenten Glauben zu schenken und seine Tippreihen immer mit einer der Zahlen 1 bis 10 anfangen zu lassen. Andererseits ist aber jede Zahl und damit auch jede Lottoreihe theoretisch "gleichmöglich", wie Laplace formulierte. Und warum sollten gerade die Zahlen von 1 bis 10 und nicht andere Zehner-Gruppen wie

- 34 bis 43 oder
- 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44 und 49 oder
- 11, 16, 17, 22, 23, 25, 29, 32, 36 und 48

eine besondere Rolle spielen? Alles gut und schön, aber vielleicht doch nur graue Theorie? Schließlich kann das Ergebnis der statistischen Untersuchung doch nicht einfach ignoriert werden! Aber ist es wirklich so außergewöhnlich, wie es scheint? Und kann das statistische Ergebnis wirklich als Argument für die gegebene Empfehlung dienen?

Vergessen wir für einen Moment, dass die statistische Auswertung bereits vorliegt. Welches Ergebnis würden wir dann ungefähr erwarten? Das heißt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit und damit ungefähr die relative Häufigkeit dafür, dass eine Lottoausspielung mindestens eine der Lottozahlen 1 bis 10 enthält? Für eine Antwort könnte man einen Computer so programmieren, dass er alle Möglichkeiten und darunter die für das Ereignis "günstigen" durchzählt. Dass es auch einfacher geht, verdanken wir einigen Formeln der **Kombinatorik**, einer mathematischen Teildisziplin, die sich mit den Möglichkeiten befasst, Dinge miteinander zu kombinieren oder anzuordnen. Der denkbar einfachste Fall betrifft die völlig freie Kombination von Merkmalen, etwa den Ergebnissen von zwei Würfeln: Jedes Ergebnis des einen Würfels kann mit jedem Ergebnis des anderen zusammentreffen, so dass es 6·6 = 36 Kombinationen gibt, wobei Würfelkombinationen wie 2-6 und 6-2 unterschieden sind.

Etwas komplizierter wird es, wenn Karten gemischt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, eine vorgegebene Anzahl von unterschiedlichen Karten anzuordnen? Handelt es sich nur um drei Karten, hier einfach 1, 2 und 3 genannt, dann sind die folgenden Reihenfolgen möglich:

Drei Karten lassen sich also auf 6 Arten sortieren, es gibt also 6 so genannte **Permutationen**. Bei 4 Karten gibt es bereits 24 und bei 5 Karten schon 120 Permutationen. Um diese Zahlen zu finden, müssen keineswegs alle Permutationen aufgelistet werden. So gibt es bei 5 Karten 5 Möglichkeiten für die erste Karte. Ist die erste Karte gewählt, kann die zweite Karte aus dem Rest von 4 Karten gewählt werden. Für die dritte Karte gibt es dann 3 und für die vierte Karte noch 2 Möglichkeiten. Am Schluss muss schließlich die einzig noch verbliebene Karte genommen werden. Die Zahl der Permutationen von 5 Karten oder anderen unterscheidbaren Dingen ist also gleich $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Die Anzahl von Permutationen hat eine so große Bedeutung, dass sie als eigenständige mathematische Operation interpretiert wird. Diese so genannte **Fakultät** wird mit einem Ausrufungszeichen "!" abgekürzt: n!, gesprochen "n Fakultät", steht für die Anzahl von Permutationen, die mit n unterschiedlichen Dingen gebildet werden können. Wie im Fall n=5 berechnet man n Fakultät allgemein mit der Formel

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

1.4 Gerecht teilen – aber wie?

Zwei Spieler tragen ein Glücksspiel aus, das sich über mehrere Runden erstreckt, in denen die Gewinnchancen jeweils 50:50 sind. Den gesamten Einsatz soll der Spieler gewinnen, der als Erster vier Runden für sich entscheidet. Als der Spielstand 3:2 erreicht ist, muss das Match vorzeitig abgebrochen werden. Man einigt sich darauf, die Einsätze dem Spielstand entsprechend fair zu teilen. Aber welches Teilungsverhältnis ist fair?

Als so genanntes Teilungsproblem gehört die Fragestellung zu den Klassikern der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Unter anderem wird das Teilungsproblem ausführlich im schon erwähnten Briefwechsel zwischen Fermat und Pascal behandelt²². Versuche einer gerechten Lösung gab es aber schon früher²³, wobei meist vorgeschlagen wurde, den Einsatz im Verhältnis der gewonnenen Runden, im vorliegenden Fall also 3 zu 2, zu teilen. Das entspricht der kaufmännisch üblichen Verfahrensweise, gemäß der beispielsweise gemeinsam erwirtschaftete Erlöse geteilt werden. Andere Autoren vertraten dagegen die Ansicht, das Verhältnis müsse sich allein an den noch fehlenden Siegen orientieren. So muss im Beispiel der erste Spieler nur noch einen, der zweite Spieler dagegen zwei Runden für sich entscheiden. Das könnte dann zu einem Teilungsverhältnis von 2 zu 1 führen.

Sowohl Fermat als auch Pascal lösten das Teilungsproblem – mit zwei verschiedenen, allgemein anwendbaren Verfahren, deren Resultate stets übereinstimmen. Pascal beschreibt in seinem Brief vom 29.7.1654 einen Teilungsplan, der sich an den Spielchancen orientiert, wie sie sich bei einer fiktiven Fortsetzung des Spiels ergeben. So führt eine weitere Runde entweder zum Stand 4:2 oder dem Gleichstand 3:3. Im ersten Fall gewinnt der erste Spieler alles, während es im zweiten Fall zweifellos gerecht ist, den Einsatz zu halbieren. Der erste Spieler erhält also den halben Einsatz sicher und bei der verbleibenden Hälfte sind die Chancen der beiden Spieler, sie zu erhalten, gleich. Eine beim Spielstand 3:2 gerechte Teilung muss daher im Verhältnis 3:1 vorgenommen werden, das heißt, der erste Spieler erhält 75% des Einsatzes, der zweite 25%.

Ausgehend von dem erhaltenen Ergebnis können nun weitere Spielstände analysiert werden. So ergibt sich für den Spielstand von 3:1, auf den nach einer weiteren Runde einer der Stände 4:1 oder 3:2 folgt, ein Anteil für den ersten Spieler von 87,5%, nämlich das Mittel aus 100% (für 4:1) und 75% (für 3:2).

Das Prinzip, das hinter Pascals Argumentation steht, ordnet jedem Spielstand ein Teilungsverhältnis zu. Berechnet werden können die Teilungsverhältnisse nacheinander, wobei – wie gerade demonstriert – stets umgekehrt zur Chronologie des Spiels vorgegangen wird. Dabei handelt es sich bei den beiden Anteilen wie beispielsweise 0,75 und 0,25 um nichts anderes als die Gewinnwahrscheinlichkeiten, die beide Spieler besitzen. Das heißt, der Einsatz wird im Verhältnis der beiden Gewinnwahrscheinlichkeiten geteilt.

Eine elegante Idee, die beiden Gewinnwahrscheinlichkeiten direkt zu berechnen, stammt von Fermat und wird in dem oben genannten Brief von Pascal kurz erwähnt. Auch dabei wird davon ausgegangen, dass noch weitere Runden gespielt werden, allerdings diesmal gerade genau so viele, wie notwendig sind, damit das Spiel auf jeden Fall entschieden wird. Im untersuchten Beispiel werden daher noch zwei Runden – wieder rein fiktiv – ausgetragen, und zwar selbst dann, wenn die erste Runde bereits das Spiel entscheiden sollte. Bei den zwei Runden sind insgesamt 4 verschiedene Spielverläufe möglich, die alle untereinander gleichmöglich sind und daher die Wahrscheinlichkeit 1/4 besitzen. Nur im letzten der in Tabelle 2 zusammengestellten Fälle gewinnt der zweite Spieler das Match. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt daher nur 1/4, während der erste Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/4 gewinnt.

²² Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 3 f. und S. 25-40.

²³ Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 2 f. und S. 9-24.

nächste Runde	übernächste Runde
"1" gewinnt	"1" gewinnt
"1" gewinnt	,,2" gewinnt
,,2" gewinnt	,,1" gewinnt
,2" gewinnt	,2" gewinnt

 Tabelle 2
 Mögliche Spielverläufe in zwei weiteren Runden

Natürlich kann auch für andere Spielstände entsprechend verfahren werden. Muss der erste Spieler noch n Runden für sich entscheiden, während seinem Gegner noch m Runden zum Gesamtgewinn fehlen, dann ist von n+m-1 fiktiven Runden auszugehen. Nach so vielen Runden – unter Umständen sogar schon vorher – hat nämlich ein Spieler sein Ziel erreicht, während es seinem Gegner keinesfalls möglich ist, schon genügend Runden gewonnen zu haben. Da es für das Resultat einer einzelnen Runde genau 2 Möglichkeiten gibt, kombinieren sich diese Einzelergebnisse in den n+m-1 fiktiven Runden zu insgesamt 2^{n+m-1} verschiedenen und untereinander gleichwahrscheinlichen Spielverläufen. Wie viele davon bringen dem ersten Spieler den Gewinn? Das heißt, wie viele Möglichkeiten gibt es für ihn, seine mindestens n angestrebten Gewinne zu erzielen?

Das ist zunächst eine rein kombinatorische Frage, die sich wie das Problem des vorhergehenden Kapitels mit Binomialkoeffizienten beantworten lässt: Ist k die Anzahl der vom ers-

ten Spieler gewonnenen Runden, dann gibt es $\binom{n+m-1}{k}$ Möglichkeiten, diese k Gewinnrunden auf die n+m-1 Runden zu verteilen. Da der erste Spieler für einen Gesamtgewinn mindestens k=n Runden für sich entscheiden muss, gibt es dafür insgesamt

$$\left(\begin{smallmatrix} n+m-1\\n\end{smallmatrix}\right) + \; \left(\begin{smallmatrix} n+m-1\\n+1\end{smallmatrix}\right) + \; \left(\begin{smallmatrix} n+m-1\\n+2\end{smallmatrix}\right) \; + \; ... \; + \left(\begin{smallmatrix} n+m-1\\n+m-1\end{smallmatrix}\right)$$

Möglichkeiten. Teilt man diese Anzahl von günstigen Fällen durch die Gesamtzahl 2^{n+m-1} aller möglichen Fälle, dann erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Der erste Spieler, der mit dieser Wahrscheinlichkeit das Match gewinnt, erhält bei Spielabbruch einen Anteil in genau dieser Größe.

Muss der erste Spieler noch 4 Runden, sein Gegner nur noch 3 Runden gewinnen, dann ist der Anteil des ersten Spielers auf Basis 6 fiktiver Runden gleich

$$\frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{64} = \frac{22}{64} = 0,34375.$$

Bei den Glücksspiel-Runden handelt es sich im Prinzip um eine Versuchsreihe, bei der ein Experiment, nämlich ein einzelnes Glücksspiel, mehrfach und unabhängig voneinander wiederholt wird. Der Gewinn einer Runde durch den ersten Spieler ist dann einfach ein Ereignis, dass eintreten kann oder auch nicht. Die Anzahl der gewonnenen Runden wird so zu einer Häufigkeit, mit der ein Ereignis innerhalb einer Versuchsreihe beobachtet werden kann. Natürlich muss die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht immer wie im hier untersuchten Fall 1/2 betragen. Für einen Ausblick auf die allgemeine Situation gehen wir daher davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis in einem einzelnen Versuch gleich p sei:

Wie groß ist nun beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass in 6 Versuchen das Ereignis genau zweimal beobachtet werden kann? Entsprechende Versuchsverläufe, bei denen das

1.5 Rot und Schwarz – das Gesetz der großen Zahlen

Werden im Spielkasino beim Roulette zehn rote Zahlen hintereinander ausgespielt, setzt das Publikum erfahrungsgemäß kaum noch auf Rot. Der Grund ist nahe liegend: Nach dem Übergewicht roter Zahlen erwartet man einen "Ausgleich", denn schließlich gibt es ja ein Ge-

Glücklicherweise gibt es einen wesentlich einfacher zu beschreitenden Weg, dessen Grundlage allerdings mathematisch anspruchsvoller ist und der daher jetzt noch nicht beschrieben werden kann. Näheres dazu findet man in Kapitel 1.13.

setz der großen Zahlen, gemäß dem sich das Verhältnis zwischen Rot und Schwarz auf Dauer ausgleicht. Andererseits sind Roulette-Läufe voneinander unabhängig, denn die Kugel verfügt ebenso wenig über ein "Gedächtnis" wie ein Würfel. Folglich sind beide Farben auch nach zehnmal Rot noch völlig gleichwahrscheinlich. Wo liegt der Widerspruch?

Mittelpunkt jeder europäischen Spielbank sind die Roulette-Tische. Dabei erscheint es auf den ersten Blick kaum abwechslungsreich, auf 37 Zahlen oder Gruppen von ihnen zu setzen und dann jeweils eine Zahl auszuspielen. So zu denken missachtet aber die edle Atmosphäre des Roulette: Angefangen beim prachtvollen Interieur eines Kasinos und der gepflegten Kleidung der Gäste, über die hohen Beträge, die unscheinbar in Form von Jetons über den Tisch geschoben werden bis hin zur von Teppichen und Filz gedämpften Geräuschkulisse, bei der die Ansagen der Croupiers und das Klackern der rollenden Kugel dominieren.

Roulette ist ein reines Zufallsspiel, dessen Gewinnoptionen in vielerlei Hinsicht symmetrisch sind: Ob man auf 17, 25 oder 32 setzt, ist völlig egal. Auch die einfachen Chancen, wie man die Möglichkeiten nennt, auf Rot, Schwarz, Gerade, Ungerade, "1 bis 18" oder "19 bis 36" zu setzen, sind untereinander gleichwertig. Allerdings kann der Spieler das Risiko bestimmen, mit dem er spielt. Auf einer Zahl ist der mögliche Gewinn hoch, nämlich der 1+35-fache Einsatz, dafür ist die Gewinnwahrscheinlichkeit mit 1/37 sehr klein. Bei den einfachen Chancen ist es genau umgekehrt: Dort beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit zwar 18/37 und ist damit relativ groß, dafür erhält man als Gewinn nur den doppelten Einsatz.

Die Wahrscheinlichkeiten beruhen beim Roulette – wie schon beim Würfel – auf der Symmetrie des Spiels und damit auf mehr oder minder abstrakten Überlegungen. Einen Bezug zur Wirklichkeit erhalten die Wahrscheinlichkeiten erst durch das Gesetz der großen Zahlen, das sicherlich zu den wichtigsten Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört: Bei Versuchsreihen – so das Gesetz der großen Zahlen – nähern sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses beliebig nahe dessen Wahrscheinlichkeit an. Beispielsweise bewegt sich der relative Anteil der roten Zahlen bei langem Roulette-Spiel immer weiter auf die Zahl 18/37 hin. Das Gesetz der großen Zahlen bildet damit eine Brücke zwischen Theorie und Praxis, das heißt konkret zwischen dem abstrakten Begriff der Wahrscheinlichkeit einerseits und den experimentell bestimmbaren relativen Häufigkeiten andererseits.

So einfach und plausibel das Gesetz der großen Zahlen klingt, so häufig wird es doch falsch gedeutet. Das betrifft besonders die Situation, bei der innerhalb einer begonnenen Versuchsreihe ein Ereignis im Vergleich zu seiner Wahrscheinlichkeit über- oder unterrepräsentiert ist. Wie ist es möglich, dass sich ein solches Ungleichgewicht wieder ausgleicht, wie es das Gesetz der großen Zahlen vorhersagt? Es liegt nahe zu erwarten, dass dazu ein gegenläufiger Ausgleich nötig ist. Aber muss es wirklich ein gegenläufiger Ausgleich sein? Das heißt, kann beim Roulette ein vorübergehendes Übergewicht roter Zahlen nur dadurch ausgeglichen werden, dass danach weniger rote Zahlen erscheinen, als es der Wahrscheinlichkeit eigentlich entspricht?

Nehmen wir als Beispiel Roulette-Sequenzen von je 37 Spielen, in denen sich aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen durchschnittlich 18-mal "Rot" ergibt. Werden in der ersten Sequenz 25 rote Zahlen ausgespielt, dann ist "Rot" gegenüber dem theoretischen Durchschnitt mit 7 Treffern im Übergewicht. Bei 23 roten Zahlen in der zweiten 37er-Sequenz verstärkt sich das Übergewicht sogar noch auf 7+5=12 rote Zahlen. Ein gegenläufiger Ausgleich hat also nicht stattgefunden. Trotzdem hat sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit von 18/37 angenähert, nämlich von 25/37 auf (25+23)/74 = 24/37.

Die Erklärung ist eigentlich ganz einfach: Das Gesetz der großen Zahlen sagt nur voraus, dass sich die *relativen* Häufigkeiten auf die Wahrscheinlichkeiten hin bewegen. Ein relativer Ausgleich findet aber bereits dann statt, wenn die auf einen "Ausreißer" folgende Sequenz weniger ungleichgewichtig ist. Da Ausreißer die Ausnahme bleiben, ist der relative Ausgleich stets sehr wahrscheinlich. Allerdings kann sich trotz des relativen Ausgleichs das absolute Ungleichgewicht noch vergrößern – so wie im Beispiel auch geschehen!

Spricht man vom Gesetz der großen Zahlen als Gesetz, so ist zu fragen, wodurch der Begriff des Gesetzes legitimiert ist. Zwei Begründungen lassen sich anführen:

- Rein empirisch lässt sich beobachten, dass in Versuchsreihen, bei denen ein und dasselbe Experiment ständig wiederholt wird, die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses einen ganz bestimmten Zielpunkt haben, auf den sich ihr Wert hinbewegt auch dann, wenn die Versuchsreihe nochmals von vorne begonnen wird. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Stabilität der Häufigkeiten. Das Gesetz der großen Zahlen vermag diese empirische Erkenntnis zu erklären, und zwar damit, dass der Zielpunkt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist.
- In mathematischer Hinsicht ergibt sich das Gesetz der großen Zahlen aus den Grundannahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei denen es sich im Wesentlichen um das Additions- und Multiplikationsgesetz handelt. Aus ihnen lässt sich sogar bestimmen, wie schnell und wie sicher sich die relativen Häufigkeiten auf die Wahrscheinlichkeit hin bewegen. Relativ aufwändig, dafür aber völlig exakt, geht das mit den Formeln der Binomialverteilung, die wir im vorangegangenen Kapitel kennen gelernt haben²⁵. In diesem Sinne mathematisch bewiesen wurde das Gesetz der großen Zahlen erstmals ungefähr 1690 von Jakob Bernoulli²⁶.

Theorie und Praxis decken sich also – so wie es in der exakten Wissenschaft von Modellen verlangt wird. Dabei macht das Wahrscheinlichkeitsmodell Aussagen, die wesentlich präziser sind als sie ursprünglichen Beobachtungen. Aber auch diese Vorhersagen, etwa die Formeln der Binomialverteilung, lassen sich in Versuchsreihen wiederum praktisch bestätigen.

Es gibt verschiedene Formulierungen dafür, wie schnell und sicher sich die relativen Häufigkeiten der Wahrscheinlichkeit annähern. Eine sehr weitgehende Version, die auch als **starkes Gesetz der großen Zahlen** bezeichnet wird, wurde erst 1909 in einem Spezialfall von Émile Borel (1871-1956) und 1917 in der allgemeinen Fassung von Cantelli entdeckt, das heißt, mathematisch aus den Grundannahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet²⁷:

Sind zwei positive Zahlen als maximale Abweichung für die relative Häufigkeit sowie als höchstzulässige Fehlerwahrscheinlichkeit vorgegeben, dann lässt sich dazu immer eine Mindest-Versuchszahl finden, nach deren Erreichen die "meisten" Versuchsreihen die vorgegebene Abweichung nicht mehr überschreiten. Genauer lässt sich sagen: Das Ereig-

Einfacher lassen sich quantitative Aussagen zum Gesetz der großen Zahlen herleiten, wenn der Begriffs- und Methodenapparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegenüber dem bisher erreichten Stand erweitert ist. Wir stellen daher die genauere Erörterung des Sachverhalts noch zurück.

²⁶ Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 118-124; Herbert Meschowski, *Problemgeschichte der Mathematik*, Band II, Zürich 1981, S. 185-187.

Über die Entstehungsgeschichte des starken Gesetzes der großen Zahlen und einer 1928 geführten Kontroverse darüber, wem die wissenschaftliche Priorität gebühre, informiert E. Senteta, On the history of the Strong Law of Large Numbers and Boole's Inequality, Historia Mathematica, 19 (1992), S. 24-39.

1.6 Unsymmetrische Würfel: Brauchbar oder nicht?

Kann ein Würfel, der in Form oder Material unregelmäßig ist, trotzdem als vollwertiger Ersatz für einen symmetrischen Würfel dienen? Das heißt, kann auch mit einem unsymmetrischen Würfel eine der Zahlen 1 bis 6 zufällig ausgewählt werden, wobei alle sechs Ergebnisse praktisch gleichwahrscheinlich sind?

Bei den bisherigen Untersuchungen wurden Würfel immer als absolut symmetrisch angenommen. Andere lässt das auf Laplace zurückgehende Modell der Wahrscheinlichkeit auch gar nicht zu! Für die Praxis ist das eigentlich unrealistisch, da jeder handelsübliche Würfel zumindest etwas unsymmetrisch ist – von gezielten Manipulationen einmal ganz abgesehen.

Übrigens werden in Spielkasinos für Würfelspiele wie Craps Präzisionswürfel verwendet, deren Abweichungen weniger als ein 1/200 Millimeter betragen sollen³¹. Um diese Genauigkeit zu erreichen, sind die Ecken und Kanten der Kasinowürfel nicht – wie bei den gebräuchlichen Spielwürfeln üblich – abgerundet. Selbst an die Löcher der Würfelaugen hat man gedacht: Sie sind mit einem Kunststoff gefüllt, dessen spezifisches Gewicht dem des Grundmaterials entspricht. Zum Schutz gegen Trickbetrüger bestehen die Würfel aus einem transparenten Material; außerdem sind sie nummeriert und mit einem Monogramm des Kasinos gekennzeichnet. Ausgemusterte Würfel werden mit einer Prägung entwertet.

Was ist aber nun mit Würfeln, die diesem Idealbild nicht im Entferntesten entsprechen, etwa deshalb, weil sie im Inneren mit einem Metallkern verfälscht wurden? Zwar versagt in solchen Fällen das Laplace-Modell, jedoch ist das glücklicherweise nicht allzu schlimm, da die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf unsymmetrische Zufallsprozesse verallgemeinert werden kann. Wie groß ist aber bei einem unsymmetrischen Würfel die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu werfen?

Um bei einem unsymmetrischen Würfel Wahrscheinlichkeiten praktisch zu bestimmen, gibt es eigentlich nur einen Weg – man würfelt, und zwar möglichst oft³². Dabei lässt sich wie beim symmetrischen Würfel eine Stabilität der relativen Häufigkeiten beobachten. Das heißt, mit dem Fortschreiten der Versuchsreihe ändern sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses immer weniger. Sie streben dabei einem bestimmten Wert zu. Wiederholt man die Versuchsreihe, so ergibt sich – trotz zufallsbedingter Unterschiede – ein ganz ähnliches Bild. Insbesondere bewegen sich die relativen Häufigkeiten wieder auf denselben Grenzwert hin, das heißt, die Abweichungen zwischen den relativen Häufigkeiten beider Versuchsreihen werden bei steigender Wurfzahl beliebig klein. Die Grenzwerte sind also Invarianten der Bauart, das heißt konkret Konstanten des verwendeten Würfels.

Auch bei allen anderen Zufallsexperimenten lässt sich entsprechendes beobachten, so dass die häufige Wiederholung eines Zufallsexperiments damit als Messmethode eingesetzt werden kann. Was dabei gemessen wird, gilt als Wahrscheinlichkeit – und zwar per Definition! Das heißt, man erklärt – wie in der Physik häufig praktiziert – den Begriff der Wahrscheinlichkeit dadurch, dass man eine Messmethode dafür festlegt. Dass die Wahrscheinlichkeit

³¹ John Scarne, Complete guide to gambling, New York 1974, S. 261. Würfelmanipulationen und andere Betrügereien werden ab S. 307 ausführlich erörtert.

Über Ansätze einer geometrischen Lösung berichtet Robert Ineichen, Der schlechte Würfel – ein selten behandeltes Problem in der Geschichte der Stochastik; Historia Mathematica, 18 (1991), S. 253-261.

anders als bei einem symmetrischen Würfel nie exakt bestimmt werden kann, ist durchaus akzeptabel. Schließlich unterliegen auch physikalische Größen bei ihrer Messung immer einer Fehlertoleranz. Im konkreten Fall muss die Versuchsreihe allerdings nicht unbedingt wirklich durchgeführt werden. Die Wahrscheinlichkeiten werden dann als prinzipiell bestimmbare, aber unbekannte Werte behandelt.

Jeder Würfel, und sei er noch so schief, besitzt also sechs Grundwahrscheinlichkeiten p_1 , ..., p_6 . Abgesehen davon, dass diese Wahrscheinlichkeiten nicht gleich 1/6 sein müssen, gelten die meisten aus dem Laplace-Modell bekannten Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten auch weiterhin: Alle Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen zwischen 0 und 1, wobei 0 die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses und 1 die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist. Weiterhin gültig bleiben auch Additions- und Multiplikationsgesetz. So ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen, gleich $p_2 + p_4 + p_6$. Außerdem ist die Summe der sechs Grundwahrscheinlichkeiten gleich der Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses, das entspricht der Identität $p_1 + ... + p_6 = 1$. Wirft man den Würfel zweimal, so handelt es sich um voneinander unabhängige Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit für eine Drei im ersten und eine Sechs im zweiten Wurf ist daher aufgrund des Multiplikationsgesetzes gleich p_3 p_6 .

Nun wissen wir zwar, wie unsymmetrische Würfel mathematisch zu handhaben sind. Die Lösung des eigentlichen Problems steht aber noch aus. Zur Vereinfachung nehmen wir zunächst eine leicht gekrümmte Münze, bei der es mehr als fraglich erscheint, ob "Kopf" und "Zahl" mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erscheinen. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass "Kopf" geworfen wird, mit p. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf "Zahl" erscheint, ist dann gleich 1-p, was wir mit q abkürzen wollen. Der Idealfall einer völlig symmetrischen Münze entspricht den Werten p=q=1/2.

Aber auch mit einer gekrümmten Münze lässt sich eine faire 1:1-Entscheidung herbeiführen. Man wirft dazu die Münze einfach mehrfach, zählt dabei die Häufigkeiten des Ereignisses "Kopf" und trifft schließlich die angestrebte Entscheidung danach, ob die ermittelte Häufigkeit von "Kopf" gerade oder ungerade ist. Als Beispiel stellen wir uns eine unsymmetrische Münze vor, bei der bei einem einzelnen Wurf der "Kopf" mit der Wahrscheinlichkeit von p=0,6 erscheint. Bereits nach zwei Würfen wird eine weit gehende Angleichung der Wahrscheinlichkeiten erreicht:

• Häufigkeit von "Kopf" ist gerade (2× "Kopf" oder 2× "Zahl"):

$$0.6 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.52$$

• Häufigkeit von "Kopf" ist ungerade ("Kopf-Zahl" oder "Zahl-Kopf"):

$$2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.48$$

Nach drei Würfen ist das Verhältnis bereits 0,504 zu 0,496, nach vier Würfen sogar 0,5008 zu 0,4992.

Wie verhält es sich aber mit anderen Ausgangsverteilungen – schließlich sind die Wahrscheinlichkeiten für eine konkrete Münze nicht unbedingt bekannt. Dazu gehen wir von einem allgemeinen Zufallsexperiment aus, das mit zwei möglichen Ergebnissen enden kann, nämlich mit "Ja" oder "Nein". Sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gleich (1+d)/2 und (1-d)/2, dann ist die (möglicherweise negative) Zahl d ein Maß für die Abweichung von der Symmetrie, das heißt, je kleiner der Betrag dieser Maßzahl d ist, desto weniger weicht das Experiment vom symmetrischen Idealfall ab. Kombiniert man nun zwei voneinander unabhängige Ja-Nein-Zufallsentscheidungen, deren Abweichungen von der Symmetrie

1.7 Wahrscheinlichkeit und Geometrie

Angenommen, man wirft in einem Zimmer, dessen Fußboden schlicht aus parallelen Brettern besteht, einen Stab in die Luft und einer der Spieler wettet, dass der Stab keine der Parallelen des Fußbodens kreuzt, während der andere darauf setzt, dass der Stab irgendwelche der Parallelen kreuzt. Man fragt nach der Gewinnaussicht dieser beiden Spieler.

Bei der Aufgabe handelt es sich um ein Zitat³⁴ aus dem Jahre 1777. Sie ist bekannt als Buffon'sches Nadelproblem und wurde erstmals 1773 vom Comte de Buffon (1707-1788) vor der Pariser Académie des sciences vorgetragen. Zu ergänzen ist die Voraussetzung, dass die Länge des Stabes nicht den Abstand zwischen zwei Parallelen überschreiten darf.

Das Buffon'sche Nadelproblem, das zweifellos auch zu den Klassikern der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu zählen ist, unterscheidet sich deutlich von den bisher behandelten Fragestellungen. Zwar gibt es beim Nadelwurf letztlich nur zwei Ergebnisse, nämlich dass der Stab eine der Parallelen schneidet oder nicht. Allerdings lassen sich Symmetrien und daraus abgeleitete Gleichmöglichkeiten, wie sie dem Laplace-Modell zugrundeliegen, nur für geometrische Daten finden, bei denen die Anzahl der möglichen Fälle unendlich ist:

- Jeder Winkel zwischen dem Stab (beziehungsweise seiner gedachten Verlängerung) und der Parallelenschar ist gleichmöglich.
- Der Mittelpunkt des Stabes kann gleichmöglich auf jeden Punkt der Ebene fallen, was sich damit auch auf den Abstand des Mittelpunktes zur nächsten Parallele überträgt. Das heißt, jeder denkbare Abstandswert zwischen 0 und dem erreichbaren Maximum, nämlich dem halben Abstand zwischen zwei benachbarten Parallelen, ist gleichmöglich.

Die mathematischen Konsequenzen dieser beiden, voneinander unabhängigen Gleichmöglichkeiten sind komplizierter als bei den bisher behandelten Situationen. Da es unendlich viele Winkel und Abstände gibt, nutzt es nämlich überhaupt nichts, wenn wir davon ausgehen, dass diese alle untereinander gleichwahrscheinlich sind. Aufgrund der unendlichen Zahl von Möglichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit für einen einzigen Winkel oder einen einzigen Abstand nämlich gleich 0, obwohl das zugehörige Ereignis keineswegs unmöglich ist!

Positive Wahrscheinlichkeiten erhält man, wenn man den Ereignissen ganze Bereiche, also Intervalle, zugrundelegt. Teilt man beispielsweise den Vollwinkel in sechs gleich große Segmente, dann besitzt jedes der Segmente als Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1/6. Das heißt, in einem solchen Segment liegt der sich in einem Experiment ergebende Winkel mit der Wahrscheinlichkeit von 1/6. Allgemein kann man für jedes beliebige Intervall eine Wahrscheinlichkeit finden, die einzig von der geometrischen "Größe" des Intervalls abhängt – gemeint ist damit die auf das Gesamtintervall bezogene relative Länge. Das Additionsgesetz für solche "geometrischen" Wahrscheinlichkeiten bedeutet nichts anderes, als dass sich Längen addieren.

Wie aber lassen sich solche geometrische Wahrscheinlichkeiten mathematisch behandeln? Wie kann zum Beispiel beim Buffon'schen Nadelproblem aus den Annahmen über die Gleichmöglichkeit der Winkel und Abstände die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden? Warum ist sie, wie empirische Versuche nahe legen, bei einer Gleichheit von Stablänge und Parallelenabstand gleich $2/\pi = 0.6366$?

³⁴ Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 494.

Bevor wir das nicht ganz einfache Nadelproblem angehen, wollen wir eine ähnliche Fragestellung, die ebenfalls auf Buffon zurückgeht, untersuchen: Eine Münze mit Radius r wird auf einen Fußboden geworfen, der mit quadratischen Fliesen der Kantenlänge a ausgelegt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze keine Fuge, deren Breite vernachlässigt wird, schneidet?

Das zweite Problem ist insofern einfacher, als es nur einen geometrischen Wert gibt, der einen Wurf beschreibt, nämlich den Punkt des Fußbodens, der vom Mittelpunkt der Münze getroffen wird. Dabei ist die Situation für jede Fliese gleich (siehe Bild 2): Der Fall, dass die Münze keine Fuge schneidet, tritt ein, wenn der Mittelpunkt der Münze im inneren Teilquadrat liegt, dessen Seiten parallel mit dem Abstand des Münzradius r zu den Kanten der Fliese verlaufen. Möglich ist das nur, wenn die Kantenlänge a der Fliese den Münzdurchmesser 2r übertrifft. Da jeder Punkt der Fliese gleichmöglich ist, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass keine Fuge geschnitten wird, als das Verhältnis der inneren Quadratfläche zur Fläche der Fliese, das ist $(a-2r)^2/a^2$.

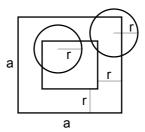


Bild 2 Wie eine geworfende Münze auf einen gefliesten Fußboden fallen kann

Ändert man das Experiment etwas ab, kann man auch andere Flächeninhalte als Wahrscheinlichkeiten interpretieren: Sind beispielsweise die quadratischen Fliesen mit einem Muster in Form eines einbeschriebenen Kreises versehen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Punkt innerhalb eines Kreises liegt, gleich dem Flächenverhältnis von Kreis zu Quadrat, also gleich $\pi(a/2)^2/a^2 = \pi/4 = 0.7854$. In Verbindung mit dem Gesetz der großen Zahlen hat das zwei bemerkenswerte Konsequenzen:

- Als Wahrscheinlichkeit lässt sich die Zahl π/4 in einer Versuchsreihe von Zufallsexperimenten aus den relativen Häufigkeiten näherungsweise bestimmen. Folglich kann auch die Zahl π mit Zufallsexperimenten experimentell angenähert werden.
- Die experimentelle Art der Flächenberechnung ist sehr universell. Statt mit Kreisen können die Fliesen auch mit anderen Flächengebieten gemustert werden. Die relativen Häufigkeiten innerhalb einer Versuchsreihe nähern sich dann dem Flächenanteil beliebig nahe an und das mit beliebig hoher Sicherheit.

Anders als bei den beiden bisher untersuchten Situationen müssen beim Buffon'schen Nadelproblem zwei Zufallsparameter, nämlich der Winkel zwischen Stab und Parallelenschar einerseits sowie der Abstand zwischen Stabmittelpunkt und nächster Parallelen andererseits berücksichtigt werden. Auch wenn die mathematischen Details dazu komplizierter sind, so kann wieder das Prinzip verwendet werden, bei dem das Verhältnis zweier Flächen zu bestimmen ist (siehe Kasten).

1.8 Zufall und mathematische Bestimmtheit – unvereinbar?

Kann die Folge der Dezimalziffern einer Zahl wie beispielsweise der Kreiszahl $\pi = 3,14159265358...$ genauso zufällig sein wie die Ergebnisse einer Würfelreihe?

Ein wesentliches Merkmal des Zufalls ist es, dass sein Wirken nicht vorhergesehen werden kann. Daher ist die Folge von Dezimalziffern der Zahl π eigentlich nicht zufällig. Denn selbst, wenn bestimmte Stellen von π unbekannt sind, so können sie doch bei Bedarf berechnet werden. Kennt man den Kontext der Ziffernfolge

aber nicht, erhalten die Ziffern subjektiv einen zufälligen Charakter. Formeln, mit denen die Ziffern der Folge erzeugt werden können, sind nämlich so kompliziert, dass man sie ohne Kenntnis des Hintergrundes kaum finden wird.

Wie zufällig ist dagegen ein Würfelergebnis? Natürlich werden auch die physikalischen Vorgänge, die einem Würfelwurf zugrunde liegen, durch Gesetze der Mechanik in völlig bestimmter Weise beschrieben. Bei genauer Kenntnis der Situation sollte es daher im Prinzip möglich sein, den Bewegungsablauf exakt vorauszuberechnen – man denke nur daran, wie präzise Raumsonden auf den Weg gebracht werden. Ist also auch beim Würfel der Zufall nur subjektiver Natur, das heißt Folge eines Informationsmangels? Maßgeblicher Initiator einer solchen Ansicht war Laplace, der in Anlehnung an die seinerzeit gemachten Fortschritte bei Mechanik und Astronomie ein deterministisches Weltbild entwarf. 1783 bemerkte er³⁵:

So wurden das Auftauchen und die Bewegung der Kometen, die wir heute als abhängig von demselben Gesetz verstehen, das die Wiederholung der Jahreszeiten sichert, einst von denjenigen, die die Sterne zu den Meteoren rechneten, als Wirkung des Zufalls angesehen. Das Wort Zufall drückt also nichts anderes als unser Unwissen über die Ursachen der Erscheinungen aus, die wir ohne irgendeine sichtbare Ordnung eintreten und einander folgen sehen.

Folglich sah Laplace die Wahrscheinlichkeitsrechnung als ein Instrument, mit dem selbst bei Unkenntnis der kausalen Zusammenhänge eine Orientierungshilfe gegeben werden kann, so dass die entstandene Unwissenheit zum Teil überwunden wird. So können mit dem Gesetz der großen Zahlen recht genaue Aussagen über den mutmaßlichen Ausgang einer Glücksspiel-Serie gemacht werden, ohne dass dazu der physikalische Verlauf eines Würfelwurfs analysiert werden muss.

Ist der Zufall generell nur eine subjektive Erscheinung, dann sind auch die Dezimalziffern der Zahl π zufällig, wenn vielleicht auch nicht ganz so zufällig wie die Ergebnisse eines Würfels. Gibt es aber überhaupt einen objektiven Zufall? Aus heutiger Sicht muss die Frage eindeutig bejaht werden, und zwar aufgrund von Erkenntnissen sowohl aus der Physik wie der Mathematik.

Die erste bedeutende Anwendung innerhalb der Naturwissenschaft erlangte die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der kinetischen Gastheorie, wie sie 1859 von Maxwell (1831-1879) begründet wurde. Die Wärme bei Gasen wird dabei als Bewegung von Molekülen gedeutet und damit auf im Prinzip bekannte mechanische Phänomene der Bewegung zurückgeführt. Neu ist hingegen die aus der astronomisch großen Zahl von Teilchen resultierende Komplexität, die explizite Berechnungen praktisch unmöglich macht. Allerdings lassen sich mathematische Ergebnisse erzielen, wenn die Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens als zufällig angesehen wird. Makroskopisch messbare Größen wie Volumen, Druck, Temperatur und chemische Zusammensetzung finden sich so durch ein mittleres Verhalten von Molekülen erklärt. Insbesondere kann die Temperatur als durchschnittliche Bewegungsenergie der Moleküle gedeutet werden. Wie jedes andere Modell musste sich die kinetische Gastheorie letztlich an der Erklärung experimenteller Ergebnisse messen lassen – und sie bestand! Dazu ein Beispiel zur so genannten Entropie: Füllt man in ein der Schwerelosigkeit ausgesetztes Behältnis nacheinander zwei verschiedene Gase, dann durchmischen sich diese gleichmäßig miteinander. Ist es aber umgekehrt auch möglich, dass sich durchmischte Gase wieder trennen? Gesetze der Mechanik würden dadurch nicht verletzt werden. Die Antwort des zufallsabhängigen Modells lautet: Im Prinzip ja, allerdings ist die selbstständige Trennung so unwahrscheinlich, dass sie kaum je eintreten wird - makroskopisch ist der Verlauf also determiniert! Die Situation tritt stark vereinfacht auch bei zwei größeren Päckchen von roten

-

³⁵ Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 71.

und schwarzen Karten ein, die miteinander vermischt werden. Der Zustand, dass beim Mischen irgendwann die roten von den schwarzen Karten getrennt werden, ist möglich aber extrem unwahrscheinlich – das Gesetz der großen Zahlen zeigt eben seine Wirkung.

Besitzt nun der Zufall innerhalb der kinetischen Gastheorie einen objektiven Charakter? Die Tatsache, dass die Daten eines Systems in der Praxis auf einen wesentlichen Kern von Durchschnittswerten wie die Temperatur konzentriert werden, zeigt ein subjektiv vorhandenes Unwissen, mehr aber nicht. Allerdings wird ein solches System aufgrund der mechanischen Deutung und der dafür bekannten deterministischen Gesetze prinzipiell im Voraus berechenbar, selbst wenn eine praktische Realisierung genauso hoffnungslos ist wie bei einem Würfelwurf. Das heißt, man kann die Hoffnung hegen, scheinbar zufällige Vorgänge der Makrophysik durch absolut deterministische Gesetze der Mikrophysik erklären zu können. Dass diese Hoffnung selbst in der Theorie unerfüllt bleiben wird, wissen wir seit der Entwicklung der Quantenphysik in den 1920er Jahren durch Heisenberg (1901-1975) und Schrödinger (1887-1961). Danach ist der Zufall für den Betrachter unüberwindbar und die scheinbar deterministischen Gesetze der Makrophysik entpuppen sich als statistische Gesetze der Mikrophysik. Deutlich erkennbar wird dieses Unvermögen durch die Heisenbergsche Unschärferelation, gemäß der bei einem Teilchen Ort und Geschwindigkeit gleichzeitig immer mit einer begrenzten Genauigkeit gemessen werden können, da jede Messung – und sei es "nur" das zur Messung verwendete Licht – selbst eine Wirkung verursacht. In den Worten Heisenbergs bedeutet das: "An der scharfen Formulierung des Kausalitätsgesetzes "Wenn wir die Gegenwart kennen, können wir die Zukunft berechnen' ist nicht der Nachsatz, sondern die Voraussetzung falsch." Da die Gesamtheit der das Modell bestimmenden Zustandsparameter nie exakt gemessen werden kann, unterliegen die Aussagen über die zukünftige Entwicklung immer dem Zufall – der Zufall ist also objektiv vorhanden.

Im Bereich der klassischen Mechanik greifen wir nochmals auf den Würfel zurück: Sein anscheinend so simpler Wurf mit seinen Dreh- und Sprungbewegungen wird von so vielen Faktoren beeinflusst, dass es praktisch unmöglich ist, seinen Verlauf vorherzusehen. Selbst zwei Würfe mit augenscheinlich identischen Anfangsbedingungen werden völlig unterschiedlich verlaufen, da sich selbst geringste Unterschiede schnell vergrößern und schließlich zu völlig abweichenden Abläufen führen: "Kleine Ursache – große Wirkung!". Im Zufall eines Würfels kann also eine spezielle Form einer kausalen Beziehung gesehen werden, bei der das Eintreten oder Nichteintreten des Ereignisses von selbst unmerklich kleinen Änderungen der Einflussgrößen abhängt. Wie die Einflussgrößen in einem konkreten Versuch wirken, ist damit unvorhersehbar. Kausale Beziehungen, die in solcher Weise anfällig gegen kleinste Störungen sind, nennt man chaotisch. Sie stellen, wie man heute weiß, weit eher den Normalfall dar als geordnete und kontinuierliche Abhängigkeiten von Größen, wie man sie von den klassischen Naturgesetzen her kennt.

Der Zufall in chaotischen Beziehungen ist eigentlich rein mathematischer Natur. Damit ist gemeint, dass er mit Hilfe der deterministischen Formeln der klassischen Physik vollständig auf mathematischer Ebene erklärt werden kann. Welches Chaos selbst einfachste Formeln "anrichten" können, weiß jeder, der schon einmal jene populären Apfelmännchen-Figuren der fraktalen Geometrie betrachtet hat. So sehr darin Regelmäßigkeiten in Form ähnlich erscheinender Gebilde zu finden sind, so wenig lässt sich eine einfache Beschreibung finden, wenn die eigentliche Grundformel unbekannt ist. Wie bei der Zahl π , und hier schließt sich der gedankliche Kreis wieder, kann durchaus von einem Zufall gesprochen werden, allerdings nur auf einer subjektiven Ebene.

Wie in der kinetischen Gastheorie kann es gerade dann sehr zweckmäßig sein, Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden, wenn ein zufälliger Einfluss objektiv überhaupt nicht gesichert ist. Auch im Alltagsleben gibt es viele solche Situationen, deren Verlauf zu einem genügend frühen Zeitpunkt nicht vorhersehbar ist:

- die Marke des ersten bei "Rot" an einer Ampel anhaltenden Autos,
- die Summe der Schadensfälle einer Versicherung während eines Jahres,
- die Niederschlagsmenge während eines Tages,
- das Geschlecht eines neugeborenen Kindes,
- die Zahl der Strafmandate, die ein ständiger Falschparker im Jahr erhält,
- die Zahl der Krankmeldungen in einem Betrieb.

Dass es auch in der Mathematik sinnvoll sein kann, den Zufall gezielt ins Spiel zu bringen, haben wir schon beim Buffon'schen Nadelproblem gesehen. Nicht nur die Zahl π , auch Inhalte beliebiger Flächen können mit Zufallsexperimenten bestimmt werden. Aber selbst wenn es um Primzahlen geht, kann es von Vorteil sein, Teilbarkeitseigenschaften als zufällig anzusehen – beispielsweise ist eine zufällig gewählte, ganze Zahl mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 gerade. Mit dieser Sichtweise lassen sich Schätzungen darüber finden, wie häufig bei einer vorgegebenen Größenordnung Zahlen mit bestimmten Eigenschaften sind – zum Beispiel Primzahlen, Primzahlzwillinge (zwei Primzahlen mit Differenz 2) oder Zahlen mit einer bestimmten Zahl von Primteilern.

Erscheinungen, die objektiv als zufällig gelten können, haben wir bisher erst in der Quantenmechanik ausmachen können. Dafür, wann ein Atomkern eines radioaktiven Isotops zerfällt, gibt es a priori keine Anhaltspunkte. Kann es aber auch innerhalb der Mathematik, in der alles so determiniert erscheint, einen wirklichen Zufall geben? In der historischen Entwicklung hat es erhebliche Probleme bereitet, Erkenntnisse über Zufall und Wahrscheinlichkeit mathematisch befriedigend zu deuten. So bestand die Wahrscheinlichkeitsrechnung noch bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts aus einer Methodensammlung zur Lösung von diversen Problemen. Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung herrschte allerdings Unklarheit: Sind die Gesetze der Wahrscheinlichkeit Naturgesetze, wie man sie aus der Physik her kennt, oder gibt es eine abstrakte Theorie, deren Objekte wie in der Geometrie so weit idealisiert sind, dass sie auch außerhalb unserer materiellen Umwelt denkbar werden? Dann müssten insbesondere auch die Begriffe des Zufalls und der Wahrscheinlichkeit genauso rein mathematisch erklärbar sein wie es beispielsweise bei Längen, Flächen und Volumen möglich ist. Konkrete Versuche und Messreihen haben in solchen Erklärungen keinen Platz – genauso wenig, wie in der Geometrie ein Volumen dadurch bestimmt wird, dass der betreffende Körper in Wasser getaucht wird, um die dabei entstehende Verdrängung zu messen.

Da sich Bestimmtheit der Mathematik einerseits und Unbestimmtheit von Wahrscheinlichkeit und Zufall andererseits auszuschließen schienen, tendierten noch zu Beginn des 20. Jahrhunderts maßgebliche Mathematiker dazu, die Wahrscheinlichkeitsrechnung als physikalische Disziplin anzusehen³⁶. Einen Weg, die Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematisch zu

einem berühmten, vor dem 2. Internationalen Mathematikerkongress gehaltenen Vortrag von David Hilbert (1862-1943). Der Vortrag hatte eine Liste von damals offenen mathematischen Problemstellungen zum Inhalt, als deren sechstes Hilbert die zitierte Aufforderung gab. Von einigen der an-

2

Dazu ein Zitat aus dem Jahre 1900: "Durch die Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen (!) Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik." Das Zitat stammt aus einem berühmten, vor dem 2. Internationalen Mathematikerkongress gehaltenen Vortrag von David

auch die Unabhängigkeit von zwei Ereignissen wird nicht mehr als das Fehlen eines "gegenseitigen Einflusses" verstanden. Zwei Ereignisse gelten im Sinne Bohlmanns als voneinander unabhängig, wenn sie dem Multiplikationsgesetz genügen, das heißt, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide eintreten, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist. Weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten, wie das Gesetz der großen Zahlen und die auf ihm beruhenden Messmethoden für Wahrscheinlichkeiten, ergeben sich dadurch – und nur dadurch –, dass logische Schlüsse aus den zur Definition erhobenen Grundeigenschaften, Axiomensystem genannt, gezogen werden.

Ein Schwachpunkt von Bohlmanns Konzept war, dass der Begriff des Ereignisses stillschweigend vorausgesetzt wurde. Endgültig überwunden wurde diese Schwierigkeit erst 1933, als Andrej Kolmogorow ein rein mathematisches Axiomensystem sowie eine darauf aufbauende Ausarbeitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorlegte. Kolmogorow verwendete dazu ausschließlich mathematische Objekte, nämlich Zahlen und Mengen. Damit hatte die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine rein mathematische und zugleich universell verwendbare Grundlage erhalten und wurde so – wie Arithmetik, Geometrie und Analysis – zu einer zweifelsfrei mathematischen Disziplin!

Kolmogorows Axiomensystem basiert darauf, dass jedem Zufallsexperiment eine Menge von möglichen Ergebnissen zugeordnet wird. Beim Würfel – ob symmetrisch oder nicht – entsprechen die Ergebnisse den Zahlen 1 bis 6. Als Ergebnismenge nimmt man daher die Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Jedes Ereignis kann nun als eine Teilmenge der Ergebnismenge aufgefasst werden – bestehend jeweils aus den "günstigen" Ergebnissen. Beispielsweise wird das Ereignis, eine gerade Zahl zu werfen, durch die Menge repräsentiert, welche alle geraden Zahlen zwischen 1 und 6 enthält, das ist die Menge {2, 4, 6}. Das sichere Ereignis umfasst alle möglichen Ergebnisse und entspricht daher der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Das unmögliche Ereignis tritt bei keinem Ergebnis ein und wird demgemäß durch die leere Menge repräsentiert.

Jedem Ereignis ist eine **Wahrscheinlichkeit** zugeordnet. Wahrscheinlichkeiten werden – in Anlehnung an das lateinische *probabilitas* und das englische *probability* – mit dem Buchstaben "P" bezeichnet. Das Ereignis, um dessen Wahrscheinlichkeit es geht, wird dem "P" in Klammern nachgestellt, wobei der Ausdruck P(…) als "P von …" gelesen wird³⁹. Die Aussage, dass das sichere Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1 besitzt, wird so durch die Formel

$$P({1, 2, 3, 4, 5, 6}) = 1$$

abgekürzt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs entspricht P({6}), und P({2, 4, 6}) steht für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen. Welche konkreten Werte diese Wahrscheinlichkeiten besitzen, ist für die Theorie zunächst belanglos – physikalische Formeln sind schließlich auch nicht an konkrete Werte gebunden. Die Werte der Wahrscheinlichkeiten können, müssen aber nicht mit denen im Laplace-Modell übereinstimmen.

Der Ansatz, Ereignisse durch Teilmengen einer Grundmenge zu beschreiben, erlaubt es, Aussagen über Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten vollkommen zu mathematisieren. Nehmen wir zum Beispiel die Aussage des Additionsgesetzes:

Gegeben sind zwei Ereignisse A und B, die miteinander unvereinbar sind. Bezogen auf die Mengen A und B bedeutet das, dass die beiden Mengen kein gemeinsames Element besitzen

³⁹ Mathematisch handelt es sich bei P um eine Abbildung von der Menge der Ereignisse in die reellen Zahlen

1.9 Die Suche nach dem Gleichmöglichen

In einer amerikanischen Fernsehshow gewinnt der Kandidat der Endrunde ein Auto, wenn er unter drei Türen diejenige errät, hinter der sich ein Auto verbirgt. Hinter jeder der beiden anderen Türen steht – als publikumswirksames Symbol für die Niete – eine Ziege. Um die Spannung zu vergrößern, öffnet der Showmaster nach der Wahl des Kandidaten zunächst eine der beiden verbliebenen Türen. Dabei wählt der Showmaster, der die richtige Tür kennt, immer eine Tür, hinter der eine Ziege steht. Anschließend darf der Kandidat seine getroffene Entscheidung nochmals revidieren und sich für die übrig bleibende dritte Tür umentscheiden. Soll er oder soll er nicht?

Als die Frage 1990/91 in einer Kolumne der amerikanischen Zeitschrift *Skeptical Inquirer* als Leserfrage diskutiert wurde, löst das eine heftige Debatte aus, die sogar über den Atlantik bis in die Leserbriefspalten von *Zeit* und *Spiegel* schwappte⁴¹. Und alles nur deshalb, weil in den genannten Zeitschriften übereinstimmend behauptet worden war, dass sich die Chance auf den Gewinn erhöht, wenn die ursprüngliche Entscheidung revidiert wird. Das klingt in der Tat sehr fraglich. Plausibel erscheint dagegen die folgende Überlegung: Die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, beträgt zu Beginn 1/3. Öffnet aber dann der Showmaster eine Tür mit einer Ziege, dann gibt es nur noch zwei Möglichkeiten, die beide vollkommen gleichberechtigt sind. Also erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für die beiden verbliebenen Türen jeweils von 1/3 auf 1/2. Die Wahl der Tür zu revidieren, macht also keinen Sinn!

Dagegen argumentieren die Befürworter eines Türwechsels, dass sich die Wahrscheinlichkeit für die ursprünglich gewählte Türe nicht ändert: Da der Showmaster immer eine der beiden anderen Türen öffnet und er dabei immer eine Tür mit einer Ziege dahinter wählt, erhält man

Der Spiegel 1991/34, S. 212-213 und dazu (gewollt und unfreiwillig) amüsante Leserbriefe in 1991/36, S. 12-13; Spektrum der Wissenschaft 1991/11, S. 12-16; Gero von Randow, *Das Ziegenproblem*, Hamburg 1992. Das Problem selbst ist nicht neu, es wurde in anderer Formulierung schon bei Martin Gardner, *Mathematische Rätsel und Probleme*, 1964 (Orig. 1959/1961), S. 147-148 (der 6. Auflage) behandelt.

über die ursprünglich gewählte Tür keine zusätzliche Information. Nach dem Öffnen sind aber nur noch zwei Türen übrig. Daher erhöht sich die Erfolgswahrscheinlichkeit für die dritte Tür auf 2/3, so dass ein Wechsel ratsam ist.

Seltsamerweise ist die Entscheidung des Kandidaten intuitiv leichter abzuwägen, wenn die Zahl der Türen größer ist. Nehmen wir an, es gebe hundert Türen mit 99 Ziegen und einem Auto, und der Kandidat zeige auf die erste Türe. Dann ist die Wahl des Kandidaten fast hoffnungslos, da die Erfolgswahrscheinlichkeit – zumindest zunächst – nur 1/100 beträgt. Öffnet nun der Showmaster eine lange Reihe von 98 der insgesamt 99 verbliebenen Türen, was werden wir dann hinter der Lücke vermuten? Richtig! – dort muss das Auto stehen, es sei denn, die ursprüngliche Wahl wäre richtig gewesen, was aber kaum wahrscheinlich ist. Bei 100 Türen würden man daher relativ sicher die ursprüngliche Wahl revidieren!

Natürlich besteht zur Originalversion mit drei Türen nur ein quantitativer Unterschied: Um das ursprüngliche Problem zweifelsfrei zu lösen, müssen die gleichmöglichen Fälle erkannt werden. Die Frage dabei ist nur, welcher Zeitpunkt mit welchem Informationsstand für die Symmetrien zugrundezulegen ist. Würde der Showmaster zu Beginn eine Türe mit einer Ziege dahinter öffnen, dann gäbe es nur noch zwei gleichmögliche Fälle. In Wirklichkeit wählt der Kandidat aber zuerst eine der drei Türen, und dann erst öffnet der Showmaster eine der beiden anderen Türen. Die zwei so verbleibenden Türen sind damit nicht zwangsläufig gleichmöglich. Einzig gesichert ist nämlich nur die Ausgangssituation, bei der unterstellt wird, dass das Auto hinter allen drei Türen gleichwahrscheinlich stehen kann. Folglich ist die ursprüngliche Wahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 richtig und mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 falsch. Nachdem nun der Showmaster eine der beiden anderen Türen so geöffnet hat, dass eine Ziege erscheint, ist in beiden möglichen Fällen die Wirkung eines Türwechsels offenkundig:

	Ursprüngliche Wahl ist	Wahrschein- lichkeit dafür	Änderung der Entscheidung ist
1. Fall	richtig	1/3	schlecht
2. Fall	falsch	2/3	gut

Da der Kandidat nicht weiß, ob für ihn der erste oder zweite Fall zutrifft, kann er sich nur global für oder gegen einen Wechsel entscheiden. Dabei zeigt die Tabelle deutlich, dass der Kandidat die Tür wechseln sollte, da eine Verbesserung doppelt so wahrscheinlich ist wie eine Verschlechterung.

Hinter dem Problem, die richtige Türe zu raten, verbirgt sich ein wichtiges Prinzip der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse können nämlich nicht nur absolut, sondern auch bedingt zum Eintritt anderer Ereignisse betrachtet werden. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln mindestens die Summe 11 zu erzielen, gleich 3/36. Sollte der erste Würfel eine Sechs zeigen, dann scheiden für das Endresultat bereits 30 der ursprünglich 36 gleichmöglichen Fälle aus. Und von den sechs verbleibenden Möglichkeiten 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6 führen zwei, nämlich 6-5 und 6-6, zum Ziel. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine 11 zu erreichen, bedingt zum Ereignis einer Sechs beim ersten Würfel gleich 2/6.

Innerhalb des Laplace-Modells kann generell entsprechend verfahren werden. Ausgegangen wird von zwei Ereignissen A und B. Dazu teilt man die Anzahl der Ereignisse, die für beide Ereignisse A und B günstig sind, durch die Anzahl der für das Ereignis B günstigen Fälle

1.10 Gewinne im Spiel: Wahrscheinlichkeit und Wert

Beim Glücksspiel Chuck-a-Luck werden pro Spiel drei Würfel geworfen. Gesetzt werden darf auf eins der sechs Würfelsymbole. Verloren wird, wenn das gesetzte Symbol auf keinem der Würfel erscheint. Andernfalls gewinnt der Spieler zusätzlich zum Einsatz für jeden Würfel, der das gesetzte Symbol zeigt, einen Betrag in Höhe des Einsatzes. Ist die Bank bei Chuck-a-Luck im Vorteil und wenn ja, wie stark?

Chuck-a-Luck, das dem deutschen Spiel Krone und Anker⁴⁴ entspricht, ist ein relativ leicht überschaubares Glücksspiel. Trotzdem werden die Gewinnchancen von Spielern oft überschätzt. So legen die sechs Symbole auf den drei Würfeln den Trugschluss nahe, die Wahrscheinlichkeit, überhaupt zu gewinnen, betrage 1/2. Da aber nicht nur doppelt, sondern auch drei- und vierfach gewonnen werden kann, scheint man im Schnitt mehr zu gewinnen als zu verlieren.

Entscheidend für die Gewinnchancen sind nicht nur die Wahrscheinlichkeiten für einen Gewinn, sondern auch dessen jeweilige Höhe. Es reicht also bei Chuck-a-Luck nicht aus, Wahrscheinlichkeiten für Gewinn und Verlust miteinander zu vergleichen. Das mathematische Modell, dessen wir uns bedienen, muss also erweitert werden, damit wir auch solche Situationen kalkulieren können.

Wir beginnen damit, die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Spielresultate zu berechnen. Dazu sind die 216 möglichen Würfelkombinationen auf ihre Gewinnhöhe hin zu überprüfen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

⁴³ Der Spiegel 1991/36, S. 12.

Die Spiele unterscheiden sich nur in den auf den Würfeln angebrachten Symbolen. Bei Chuck-a-Luck werden normale Würfel verwendet, bei Krone und Anker sind es die vier Spielkartensymbole Kreuz, Pik, Herz und Karo sowie Krone und Anker. Illustrationen und Näheres zu beiden Spielen findet man bei David Pritchard, Das große Familienbuch der Spiele, München 1983, S. 174; Erwin Glonnegger, Das Spiele-Buch, München 1988, S. 61; John Scarne, Complete guide to gambling, New York 1974, S. 505-507.

Gewinn- höhe	Würfelkombinationen	Anzahl	Wahrschein- lichkeit
4	6-6-6	1	1/216
3	6-6-a, $6-a-6$, $a-6-6$ mit $a = 1,2,3,4,5$	15	15/216
2	6-a-b, $a-6-b$, $a-b-6$ mit $a, b = 1,2,3,4,5$	75	75/216
	a-b-c mit $a, b, c = 1,2,3,4,5$	125	125/216
gesamt:		216	1

Tabelle 3 Gewinnwahrscheinlichkeit beim Chuck-a-Luck (Einsatz auf die Sechs).

Wir kennen nun die Wahrscheinlichkeiten, mit der die verschiedenen Gewinnhöhen erreicht werden. Wie aber lassen sich daraus die Gewinnchancen berechnen? Das heißt, gesucht ist ein Maß dafür, wie sich bei langem Spiel Gesamtgewinn und -einsatz zueinander verhalten. Konkret: Gesucht ist das Verhältnis, in dem bei langen Spielserien der durchschnittliche Gewinn zum Einsatz steht. Berechnet werden kann der durchschnittliche Gewinn in einer Wurfserie, wenn die relativen Häufigkeiten der Gewinnhöhen bekannt sind: Jede Gewinnhöhe wird dazu mit ihrer relativen Häufigkeit multipliziert. Anschließend werden alle diese Produkte addiert. Die Summe ist dann gleich dem durchschnittlichen Gewinn.

Bei längerem Spiel wirkt das Gesetz der großen Zahlen. Das bedeutet, dass sich die relativen Häufigkeiten der einzelnen Gewinnhöhen auf die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten hin bewegen. Folglich strebt auch der durchschnittliche Gewinn einer Zahl zu, die sich dadurch berechnen lässt, dass man alle Gewinnhöhen mit ihren Wahrscheinlichkeiten multipliziert und anschließend die Produkte summiert.

Auf diesem Weg erhält man beim Chuck-a-Luck für den sich auf Dauer einstellenden Durchschnittsgewinn den Wert

$$\frac{1}{216} \cdot 4 + \frac{15}{216} \cdot 3 + \frac{75}{216} \cdot 2 + \frac{125}{216} \cdot 0 = \frac{199}{216} = 0,9213,$$

das sind etwa 8% weniger als der Einsatz. Auf Dauer beträgt der durchschnittliche Verlust also etwa 8% des Einsatzes.

Beim Gewinn eines Glücksspiels handelt es sich um eine Zahl, deren Wert in einem Zufallsexperiment bestimmt wird. Ähnliche Situationen treten sehr häufig auf:

- Die Zahl der Felder, die man im "Mensch ärgere dich nicht" weiterrücken darf. Sie ist das direkte Ergebnis eines Würfelwurfs.
- Die Zahl der Würfe, die ein Backgammon-Spieler zum Rauswürfeln seiner Steine im Endspiel, dem so genannten Running Game, benötigt.
- Die Schadenssumme, die eine Versicherung in einem Jahr begleichen muss.
- Die Anzahl derjenigen, die unter tausend zufällig befragten Bürgern angeben, eine bestimmte Meinung zu haben.
- Die Zahl der radioaktiven Zerfallsprozesse, die sich während eines Experiments beobachten lassen.
- Die Gewinnhöhe für eine bestimmte Gewinnklasse im Lotto.

Ein Zahlenwert, der zufällig bestimmt ist, wird **Zufallsgröße** oder **zufällige Größe** genannt, manchmal wird auch von einer Zufallsvariablen gesprochen. Im Einzelnen besteht eine Zufallsgröße aus einem Zufallsexperiment und Daten darüber, wie die Ergebnisse des Zufallsexperiments die Werte der Zufallsgröße bestimmen. Ausgehend von einem Zufallsexperiment handelt es sich bei einer Zufallsgröße also um eine Zuordnungsvorschrift, bei der

jedem Ergebnis des Experiments eine Zahl zugeordnet wird. Natürlich können zu einem Zufallsexperiment durchaus unterschiedliche Zufallsgrößen definiert werden.

Obwohl eine Zufallsgröße durch ihre Verbindung zu einem Zufallsexperiment beschrieben wird, interessiert es oft sehr wenig, wie diese Verbindung konkret aussieht. Wesentlicher sind aber die Wahrscheinlichkeiten, mit der die einzelnen Werte erreicht werden. Für den Gewinn beim Chuck-a-Luck haben wir die Wahrscheinlichkeiten bereits bestimmt: Die Wahrscheinlichkeit für den Wert 4 beträgt 1/216, für den Wert 3 beträgt sie 15/216, für den Wert 2 beträgt sie 75/216, und für den Wert 0 ergibt sich die Wahrscheinlichkeit 125/216. Bezeichnet man die Zufallsgröße mit dem Buchstaben X, kann man die so genannte Wahrscheinlichkeitsverteilung abkürzend auch in der Form

$$P(X = 0) = 125/216,$$

 $P(X = 2) = 75/216,$
 $P(X = 3) = 15/216$ und
 $P(X = 4) = 1/216$

schreiben^{III}

Beim Chuck-a-Luck haben wir die Gewinnchancen direkt aus den möglichen Gewinnhöhen und den ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten berechnet. Konkret geschah dies dadurch, dass alle Gewinnhöhen mit ihrer Wahrscheinlichkeit multipliziert und anschließend alle Produkte summiert wurden. Sinnvoll ist die verwendete Formel aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen. Denn bei längerem Spiel nähert sich der durchschnittliche Gewinn der berechneten Zahl beliebig nahe an.

Das zugrundeliegende Prinzip ist natürlich nicht auf das Chuck-a-Luck-Spiel beschränkt. So definiert man für eine Zufallsgröße X, die nur endlich viele Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ annehmen kann, den so genannten **Erwartungswert**, abgekürzt mit E(X) und gesprochen "E von X", entsprechend durch die Formel^{IV}:

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \dots + P(X = x_n) \cdot x_n$$

Von der Gewinnhöhe beim Chuck-a-Luck kennen wir den Erwartungswert E(X) = 199/216 bereits. Für die Höhe eines Würfelwurfs erhält man den Erwartungswert

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3.5$$

Da alle Würfelergebnisse gleichwahrscheinlich sind, stimmt der Erwartungswert mit dem Durchschnitt der möglichen Würfelwerte überein. Für die Summe von zwei Würfelwerten erhält man den Erwartungswert

$$\frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 + \dots + \frac{3}{36} \cdot 10 + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 = 7.$$

Eine spezielle Klasse von Zufallsgrößen ist noch hervorzuheben: Nimmt eine Zufallsgröße nur die Werte 0 und 1 an, dann ist ihr Erwartungswert gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgröße den Wert 1 annimmt. Damit können Erwartungswerte auch als verallgemeinerte Wahrscheinlichkeiten angesehen werden.

Intuitiv ist klar, dass der Erwartungswert die Größenverhältnisse einer Zufallsgröße charakterisiert – und zwar mit einer einzigen Zahl. Beeinflusst wird die Höhe des Erwartungswertes durch alle Werte, die die Zufallsgröße annehmen kann, wobei Werte mit höherer Wahrscheinlichkeit einen stärkeren Einfluss haben als solche, die weniger wahrscheinlich sind. Wie für Wahrscheinlichkeiten gilt auch für Zufallsgrößen ein Gesetz der großen Zahlen: Wird das der Zufallsgröße zugrundeliegende Experiment in einer Versuchsserie ständig wie-

derholt und sind die Ergebnisse der Einzelexperimente voneinander unabhängig, dann nähert sich der Durchschnittswert der Zufallsgröße dem Erwartungswert beliebig nahe an – von auf Dauer beliebig unwahrscheinlich werdenden Ausnahmen einmal abgesehen. Bei der Analyse von Spielen erhält damit der Erwartungswert des Gewinns, kurz **Gewinnerwartung** oder einfach **Erwartung**, die zentrale Bedeutung:

- Die Gewinnchancen eines Spiels sind fair, wenn Einsatz und Gewinnerwartung übereinstimmen.
- Kann ein Spiel strategisch beeinflusst werden, sollte sich ein Spieler so verhalten, dass seine Gewinnerwartung möglichst groß wird. Auf Dauer erzielt er so den größten Erfolg.

Um Erwartungswerte zu berechnen, aber auch um quantitative Resultate über Erwartungswerte zu interpretieren, gibt es eine breite Palette von Techniken und Gesetzmäßigkeiten, die zumindest im Überblick vorgestellt werden sollen. Im Wesentlichen handelt es sich darum, wie man mit Zufallsgrößen rechnet. Als Beispiel nehmen wir Zufallsgrößen, wie sie sich aus den Ergebnissen von zwei aufeinanderfolgenden Chuck-a-Luck-Partien ableiten:

X₁, X₂, ..., X₆ bezeichnen den Gewinn, wenn beim ersten Wurf ein einfacher Einsatz auf Eins, Zwei, ... beziehungsweise Sechs gesetzt wird.

Y₁, Y₂, ..., Y₆ bezeichnen den Gewinn, wenn beim zweiten Wurf ein einfacher Einsatz auf Eins, Zwei, ... beziehungsweise Sechs gesetzt wird.

Alle zwölf Zufallsgrößen besitzen übereinstimmende Wahrscheinlichkeitsverteilungen; ihre Erwartungswerte sind gleich 199/216. Wichtig ist, dass die Beziehungen der Zufallsgrößen untereinander sehr unterschiedlich sind. So ist es unmöglich, dass X_1 und X_6 beide zugleich den Maximalwert 4 erreichen, da sich die dafür notwendigen Würfel-Ereignisse 1-1-1 und 6-6-6 gegenseitig ausschließen. Dagegen kann es durchaus vorkommen, dass man in beiden Runden den Höchstgewinn erzielt. Das bedeutet beispielsweise, dass X_1 und Y_6 beide zugleich den Wert 4 erreichen können. Die Ereignisse, dass diese beiden Zufallsgrößen bestimmte Werte annehmen, sind sogar stets voneinander unabhängig – man spricht auch von **unabhängigen Zufallsgrößen**.

Mit Zufallsgrößen, denen dasselbe Zufallsexperiment zugrundeliegt, kann man nun rechnen. Bezogen auf das aus zwei Chuck-a-Luck-Würfe umfassende Zufallsexperiment sind Ausdrücke wie

$$2X_6$$
, $X_6 - 1$, $X_1 + X_6$, $X_6 + Y_6$ und X_6Y_6

nicht nur mathematisch sinnvoll⁴⁵, sie haben auch eine praktische Deutung. So ist

2X₆ der Gewinn, wenn beim ersten Wurf auf die Sechs ein doppelter Einsatz gesetzt wird;

 X_6-1 der möglicherweise negative Gewinnsaldo, wenn vom Gewinn der Einsatz abgezogen wird (bei einfachem Einsatz auf die Sechs im ersten Wurf);

X₁ + X₆ der Gesamtgewinn, wenn beim ersten Wurf jeweils einfach auf Eins und Sechs gesetzt wird;

45 Mathematisch handelt es sich um die Addition, Multiplikation etc. von Abbildungen, die einen gemeinsamen Definitionsbereich besitzen.

1.11 Welcher Würfel ist der beste?

Zwei Spieler knobeln darum, wer mit einem Würfel die höchste Zahl erreicht. Gespielt wird mit drei Würfeln, die abweichend vom Standard beschriftet sind. Auf dem ersten Würfel stehen die Zahlen 5-7-8-9-10-18, auf dem zweiten Würfel 2-3-4-15-16-17 und 1-6-11-12-13-14 auf dem dritten. Nacheinander dürfen sich beide Spieler einen Würfel aussuchen. Welchen Würfel sollte der erste Spieler wählen?

Die drei Würfel entsprechen drei Zufallsgrößen, deren Werte größenmäßig miteinander verglichen werden. Bei normalen Zahlen findet sich unter dreien immer eine, die von keiner anderen in ihrer Größe übertroffen wird. Gilt das aber auch für Zufallsgrößen? Welche der drei Würfel liefert die "größte" Zufallsgröße?

Vergleichen wir zunächst die ersten beiden Würfel miteinander. Geht man alle 36 gleichwahrscheinlichen, in Tabelle 5 aufgelisteten Kombinationsmöglichkeiten durch, dann findet man, dass in 21 von 36 Fällen der Wert des ersten Würfels den des zweiten übersteigt. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt also 21/36 für den Spieler, der den ersten Würfel verwendet.

Würfel I Würfel II	5	7	8	9	10	18
2	I	I	I	I	I	I
3	I	I	I	I	I	I
4	I	I	I	I	I	I
15	II	II	II	II	II	I
16	II	Π	II	II	II	I
17	П	П	II	П	П	I

Tabelle 5 "Würfel I gegen II" – welcher Würfel die höhere Zahl zeigt

Tabelle 6 zeigt, dass der dritte Würfel noch schlechter ist als der zweite. Wieder beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 21/36.

Würfel II Würfel III	2	3	4	15	16	17
1	II	II	II	II	II	II
6	III	III	III	II	II	II
11	III	III	III	II	II	II
12	III	\mathbf{III}	III	II	II	II
13	III	\mathbf{III}	III	II	II	II
14	III	III	Ш	II	Π	II

Tabelle 6 "Würfel II gegen III" – welcher Würfel die höhere Zahl zeigt

Damit scheint die Frage beantwortet. Der erste Würfel ist besser als der zweite Würfel, der allerdings den dritten noch übertrifft. Der erste Spieler greift also zum ersten Würfel. Und was passiert, wenn sein Gegner nun den dritten Würfel wählt? Wider Erwarten ist der erste Spieler keineswegs im Vorteil, sondern er verliert mit der Wahrscheinlichkeit von 21/36, wie es in Tabelle 7 zu sehen ist.

Würfel III Würfel I	1	6	11	12	13	14
5	I	III	III	III	III	Ш
7	I	I	III	III	III	Ш
8	I	I	Ш	III	Ш	Ш
9	I	I	III	III	III	Ш
10	I	I	III	III	III	Ш
18	I	I	I	I	I	I

Tabelle 7 "Würfel III gegen I" – welcher Würfel die höhere Zahl zeigt

Der Spieler, der sich zuerst für einen Würfel entscheiden muss, ist also deutlich benachteiligt. Kein Würfel ist der beste, denn zu jedem gibt es einen, der noch besser ist: Der erste Würfel ist besser als der zweite, der zweite Würfel besser als der dritte, und der dritte Würfel besser als der erste. Was auf den ersten Blick dem gesunden Menschenverstand zu widersprechen scheint, formuliert sich mathematisch ganz nüchtern: Die Relation "besser als" zwischen zwei Zufallsgrößen ist nicht transitiv, das heißt, die von üblichen Zahlen her ge-

1.12 Ein Würfel wird getestet

Ein Würfel, dessen Symmetrie getestet werden soll, wird zehntausendmal geworfen. Als Summe der dabei geworfenen Augenzahlen ergibt sich 37241, das entspricht einem Durchschnitt von 3,7241. Ist eine solche Abweichung vom Idealwert 3,5 unter normalen Umständen möglich? Oder ist das Ergebnis nur dadurch zu erklären, dass der Würfel unsymmetrisch ist?

Fragestellungen dieser und ähnlicher Art sind typisch für die Praxis der angewandten Statistik. Liegt das Ergebnis einer Versuchsreihe im Bereich dessen, was durch zufällige Schwankungen erklärbar ist? Oder können die ursprünglich gemachten Annahmen nicht mehr aufrecht erhalten werden? Konkret: Der als symmetrisch angenommene Würfel muss unsymmetrisch sein, das als wirkungslos angenommene Medikament erweist sich als wirksam, und der als unverändert populär angenommene Politiker ist es überhaupt nicht mehr.

Untersucht werden solche Probleme dadurch, dass ausgehend von den gemachten Annahmen, im Allgemeinen **Hypothese** genannt, Aussagen über die mutmaßlichen Ergebnisse einer durchzuführenden Versuchsreihe abgeleitet werden. Meist handelt es sich um einen Bereich, innerhalb dessen eine bei der Versuchsreihe zu messende **Prüfgröße**, auch **Stichprobenfunktion** genannt, mit fast sicherer Wahrscheinlichkeit liegen muss. So bestimmt man bei der Würfelreihe Grenzen dafür, dass die konkret erwürfelte Augensumme fast sicher darin liegt – beispielsweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99. Ergibt sich dann aber in einer Versuchsreihe eine zu starke Über- oder Unterschreitung, wird der Würfel für unsym-

Das Set mit vier Würfeln ist dem Buch Martin Gardner's mathematische Denkspiele, München 1987 (Original 1983), S. 7 ff. entnommen. Die Beschriftung des Dreier-Sets stammt aus G. J. Székely, Paradoxa, Frankfurt 1990, S. 65 f.

metrisch erklärt. Das lässt sich nicht zuletzt dadurch rechtfertigen, weil es durchaus plausibel ist, dass die andernfalls sehr unwahrscheinliche Abweichung durch eine Unsymmetrie verursacht worden sein *kann*. Dagegen könnte bei einer weniger sinnvoll vorgenommenen Versuchsplanung das Eintreten eines a priori unwahrscheinlichen Ergebnisses nicht unbedingt als Indiz dafür gewertet werden, die gemachte Hypothese zu verwerfen: Beispielsweise ist es bei 10000 Würfen sehr unwahrscheinlich, *exakt* eine Summe von 35000 Augen zu erhalten. Da es aber keine Unsymmetrie gibt, die speziell ein solches Ergebnis in plausibler Weise verursachen könnte, wäre es wenig sinnvoll, eine Unsymmetrie auf diesem Weg erkennen zu wollen

Aber selbst beim "Ausreißer"-Kriterium kann es durchaus zu einem Fehlschluss kommen:

- Auch wenn ein Würfel vollkommen symmetrisch ist, so wird er doch mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, im Beispiel konkret von 0,01, für unsymmetrisch erklärt.
- Umgekehrt wird eigentlich überhaupt keine Aussage getroffen. Das heißt, ein unsymmetrischer Würfel muss keineswegs zu auffälligen Ergebnissen führen. Insbesondere bei nur einem geringfügig unsymmetrischen Würfel kann man realistisch auch nichts anderes erwarten⁴⁷. Auch ist ein Test, der nur den durchschnittlichen Wurfwert berücksichtigt, nicht dazu geeignet, jede Art der Abweichung aufzuspüren.

Obwohl es eine mathematische Statistik, die sich mit wahrscheinlichkeitstheoretisch fundierten Testmethoden beschäftigt, erst seit etwa 1890 gibt, hat es einzelne Beispiele für so genannte Hypothesentests schon früher gegeben. So widerlegte bereits 1710 der englische Mathematiker John Arbuthnot (1667-1735) die Annahme, dass Jungen- und Mädchengeburten gleichwahrscheinlich sind. In der ihm vorliegenden Geburtsstatistik überwog in jedem der insgesamt 82 Einzeljahre die Zahl der Jungen gegenüber den Mädchen. Bei im Prinzip gleichwahrscheinlichen Ereignissen hätte dieses Resultat nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2⁸² rein zufällig eintreten können – eine selten klare Widerlegung der gemachten Hypothese⁴⁸!

Beim Würfel ist die Argumentation nicht so einfach. Immerhin ist es aber plausibel, in welcher Hinsicht das Versuchsergebnis überprüft werden sollte, ob es nämlich dem Gesetz der großen Zahlen widerspricht. Muss die durchschnittliche Wurfhöhe bei 10000 Würfen nicht näher am Erwartungswert 3,5 liegen als der beobachtete Wert von 3,7241? Da wir das Gesetz der großen Zahlen bisher nur qualitativ ausgesprochen haben, muss dazu zunächst eine quantitative Präzisierung nachgeholt werden. Dabei sind die Rechenregeln für Erwartungswerte und Standardabweichungen äußerst hilfreich.

Aufgrund der allgemeinen Bedeutung beschränken wir uns nicht auf den speziellen Fall der Wurfserie, sondern untersuchen eine beliebige Folge von untereinander identisch verteilten

⁴⁷ In anderen Fällen nimmt man die Tatsache, dass die Versuchsergebnisse nicht der Hypothese widersprechen, bereits zum Anlass, die Hypothese als bestätigt anzusehen. Ist die Hypothese in Wahrheit falsch, spricht man dann von einem Fehler 2. Art – im Unterschied zum Fehler 1. Art, bei dem eine in Wirklichkeit richtige Hypothese verworfen wird. Wie wahrscheinlich Fehler 1. und 2. Art sind, und wie sie bei der Planung eines Tests möglichst klein gehalten werden können, ist ein wesentlicher Bestandteil der mathematischen Statistik.

Genauer erörtert werden Arbuthnots Untersuchungen, aber auch frühe statistische Schlussweisen von anderen Gelehrten, in Robert Ineichen, Aus der Vorgeschichte der Mathematischen Statistik, Elemente der Mathematik, 47 (1992), S. 93-107.

1.13 Die Normalverteilung: Wie lange noch zum Ziel?

In einem Rennspiel, bei dem es darum geht, die eigene Spielfigur als Erster ins Ziel zu würfeln, hat ein Spieler noch 76 Felder vor sich. Pro Zug darf er seine Figur um das Ergebnis zweier Würfel weiterrücken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Ziel in höchstens neun Zügen zu erreichen?

Würfelrennspiele der beschriebenen Art besitzen eine große Tradition in breiter Variation und Ausgestaltung. Zu den Spielen, bei denen sich die Spieler anders als bei "Mensch ärgere dich nicht" und Backgammon nicht gegenseitig behindern, gehören Klassiker wie das Gänsespiel, das Leiterspiel und Pferderennspiele. Eine moderne Variante ist das sehr erfolgreiche Spiel Dampfross⁵¹, welches der Engländer Dave Watts 1970 erfand. Gerade bei diesem Spiel ist es häufig sehr wichtig, die Chancen für bestimmte Wegstrecken abzuschätzen, nämlich dann, wenn zu entscheiden ist, ob die Strecke kostenpflichtig abgekürzt werden soll. Eine Untersuchung zu dieser Problematik findet man im entsprechenden Kasten.

Im Prinzip ist das gestellte Problem in der gleichen Weise lösbar, wie das in Kapitel 1.4 erörterte Teilungsproblem: Aufsteigend für immer längere Wegstrecken werden die Wahrscheinlichkeiten berechnet, diese in den unterschiedlichen Wurfzahlen zu bewältigen. Dabei wird

Auf einem wabenförmig eingeteilten Spielplan, der eine vereinfachte Landkarte mit Gewässern, Bergen und Städten darstellt, werden Eisenbahnstrecken zunächst gebaut und anschließend befahren. Beim Befahren werden pro Runde zwei Städte als Anfangs- und Zielort eines Wettrennens ausgewürfelt. Jeder Spieler, der mitfahren will, muss sich für eine Route entscheiden, wobei nur eigene Streckenteile kostenfrei befahren werden dürfen – auf fremden Strecken muss an den jeweiligen Eigentümer Miete bezahlt werden. Nachdem sich die Spieler für eine Stecke entschieden haben, wird das eigentliche Rennen ausgewürfelt. Die beiden ersten Spieler, die das Ziel erreichen, erhalten Punkte. Nähere Informationen zum Spiel Dampfross findet man in Erwin Glonnegger: Das Spiele-Buch, München 1988, S. 75; Jury "Spiel des Jahres", Spiel des Jahres, München 1988, S. 62.

jeweils auf die schon vorhandenen Ergebnisse zurückgegriffen. Sind $Y_1, Y_2, ...$ die Würfelergebnisse, dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, in neun Würfen mindestens die Summe 76 zu erzielen, gleich $P(Y_1 + ... + Y_9 \ge 76)$ und kann mit der Formel

$$\begin{split} P(Y_1+\ldots+Y_9 \geq 76) &= \quad \frac{1}{36} \, P(Y_1+\ldots+Y_8 \geq 74) \\ &+ \frac{2}{36} \, P(Y_1+\ldots+Y_8 \geq 73) \\ &+ \frac{3}{36} \, P(Y_1+\ldots+Y_8 \geq 72) \\ &+ \quad \ldots \\ &+ \frac{1}{36} \, P(Y_1+\ldots+Y_8 \geq 64) \end{split}$$

berechnet werden, falls die Wahrscheinlichkeiten der rechten Gleichungsseite bereits bekannt sind 52 . Jede Situation wird also bedingt zu den möglichen Ergebnissen des gerade gemachten Wurfes analysiert. Schritt für Schritt erhält man so die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0,042138. Voraussetzung dazu ist entweder ein Computer 53 oder genügend Ausdauer, da mehrere hundert Zwischenwerte berechnet werden müssen. Insofern wäre es natürlich wünschenswert, zumindest ein ungefähres Ergebnis einfacher berechnen zu können. Das ist in der Tat möglich, und zwar auf der Basis des so genannten zentralen Grenzwertsatzes. Dieser Satz macht bei gleichverteilten und unabhängigen Zufallsgrößen $Y=Y_1,\,Y_2,\,...,\,Y_n,$ wie sie in Versuchsreihen auftreten, Aussagen über die Summe $Y_1+Y_2+...+Y_n,$ sofern die Versuchsanzahl n genügend groß ist. Bekanntlich besitzt die Summe den Erwartungswert n \cdot E(Y) und die Standardabweichung $\sqrt{n}\cdot\sigma_Y$. Wie die Zufallsgröße genau aussieht, geht aus den Wahrscheinlichkeiten

$$P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \le u)$$

hervor. Aber wie verhalten sich diese Wahrscheinlichkeiten, wenn der Parameter u variiert wird? Dazu besagt der **zentrale Grenzwertsatz**, dass bei einer genügenden Versuchszahl eine gute Näherung allein auf Basis des Quotienten

$$t = \frac{u - n \cdot E(Y)}{\sqrt{n} \cdot \sigma_{y}}$$

berechenbar ist. Maßgebend ist also nur, wie weit der Parameter u vom Erwartungswert $n \cdot E(Y)$ entfernt ist, wobei dieser Abstand relativ zur Standardabweichung $\sqrt{n} \cdot \sigma_Y$ gemessen wird. Die eigentliche Grenzwertaussage lässt sich am besten aus der Perspektive eines fest gewählten Wertes t formulieren: Passt man zur fest gewählten Zahl t mit fortschreitender

$$P(Y_1 + ... + Y_9 \ge 76 \mid Y_9 = k) = P(Y_1 + ... + Y_8 \ge 76 - k).$$

⁵² Bei der Formel handelt es sich um eine Anwendung der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit (siehe Kapitel 1.9). Das Ereignis $Y_1+...+Y_9 \ge 76$ wird dabei bedingt zu den möglichen Ergebnissen Y_9 des neunten Wurfes untersucht. Dabei gilt

Einfacher als die nahe liegende Möglichkeit, ein Programm in einer Programmiersprache wie PASCAL, C, BASIC oder FORTRAN zu schreiben, ist die Verwendung einer Tabellenkalkulation. Für die noch zurückzulegenden Feldzahlen von 76 abwärts bis -10 (letzteres entspricht der Situation, dass das Ziel um 10 Felder überschritten wurde) und Restwurf-Zahlen zwischen 0 und 9 wird eine Tabelle für die zugehörigen Erfolgswahrscheinlichkeiten angelegt. Außer den Anfangswerten 0 und 1, die den Wahrscheinlichkeiten bei Spielende entsprechen, muss nur eine einzige Formel eingegeben werden. Der Rest kann mit Befehlen der Tabellenkalkulation wie "Unten ausfüllen" und "Rechts ausfüllen" erledigt werden.

Backgammon

Können in der Endphase des Backgammon gegenseitig keine Steine mehr geschlagen werden, erhält das Spiel den Charakter eines reinen Wettrennens, Running Game genannt. Abgeschätzt werden solche Endspiel-Stellungen meist dadurch, dass man die noch zurückzulegenden Felder aller Steine eines Spielers zu einer Gesamtpunktzahl addiert. Stellt man sich eine fiktive Stellung vor, bei der jeder Spieler über einen Stein verfügt, der um diese Gesamtpunktzahl vom Ziel entfernt ist, dann entspricht das einem einfachen Modell, mit dem die Chancen der eigentlichen Stellung abgeschätzt werden können. Verbessern lassen sich die Aussagen des Modells noch dadurch, dass die Positionen der beiden Steine abhängig von den Details der ursprünglichen Stellung wie Anzahl und Verteilung der Steine geringfügig modifiziert werden, um so die beim Herauswürfeln verloren gehenden Punkte zu kompensieren.

In der Praxis werden die Gewinnaussichten häufig deshalb abgeschätzt, um die Chancen beim so genannten Verdoppeln abzuwägen. Dieses spezielle Problem wird in Kapitel 2.14 noch ausführlich behandelt werden.

Für das genannte Backgammon-Modell wollen wir nun die Gewinnchancen der Stellung abschätzen, bei der der führende Spieler noch w Felder und sein Gegner noch w+d Felder zurückzulegen hat. Bis auf zwei Details ist alles wie beim schon untersuchten Dampfross:

- Erreicht ein Spieler das Ziel, endet das Spiel sofort, so dass der anziehende Spieler über einen Vorteil verfügt. Da das Anzugsrecht nach einem Zug zum Gegner wechselt, entspricht der Anzugs-Vorteil rechnerisch einem halben Zug, das heißt, der anziehende Spieler erhält bei seiner Felderzahl einen Bonus in Höhe des halben Erwartungswertes eines Wurfes.
- Gewürfelt wird mit zwei Würfeln, wobei die Würfelpunkte eines Paschs doppelt gezogen werden. Für die so pro Wurf zurückgelegte Felderzahl ergibt sich ein Erwartungswert von 8,167 und eine Standardabweichung von 4,298.

Dem zugrundegelegten Spielstand von w zu w + d Feldern entspricht eine zu erwartende Wurfanzahl von w/8,167 und eine Standardabweichung von 2,127· \sqrt{w} . Die Gewinnwahrscheinlichkeit für den führenden Spieler beträgt daher ungefähr

$$\phi(0,470 \frac{d \pm 4,083}{\sqrt{w}}),$$

wobei der Abstand zwischen den Spielern um 4,083 Felder abhängig davon vergrößert oder verringert wird, ob der führende Spieler als Erster würfelt oder nicht. Die Näherungen sind bei nicht zu kleinen Feldzahlen relativ genau; so ergeben sich für die Stände 20:25, 25:20, 65:55, 65:65, 65:75 und 65:85 die angenäherten Wahrscheinlichkeiten 0,830 (exakt 0,829), 0,462 (exakt: 0,451), 0,354 (exakt: 0,358) 0,594 (exakt: 0,595), 0,794 (exakt: 0,787) und 0,920 (exakt: 0,906). Wird von einer richtigen, das heißt einer mehrere Steine umfassende Backgammon-Stellung ausgegangen, entstehen beim Übergang zum Modell allerdings noch zusätzliche Ungenauigkeiten.

Risiko

"Rennen" ganz besonderer Art finden im nicht unumstrittenen, vom Franzosen Albert Lamorisse erfundenen Spiel Risiko statt, welches 1957 erstmals erschien. Der Spielplan von Risiko zeigt eine Weltkarte. Die darauf eingezeichneten Felder entsprechen fiktiven Ländern, die – je nach Auflage – zu "erobern" beziehungsweise zu "befreien" sind⁵⁶. In einer Variante gewinnt derjenige, der mit seinen Spielsteinen, die Armeen symbolisieren, die ganze Welt befreit, das heißt alle gegnerischen Steine schlägt.

Pro Zug werden ein oder mehrere Angriffe ausgetragen, in denen jeweils bis zu drei in einem Land stehende Steine ein benachbartes Land angreifen, in welchem gegnerische Spielsteine stehen, von denen sich jeweils bis zu zwei – in der alten Variante auch drei – Steine verteidigen können. Das Ergebnis des Angriffs wird ausgewürfelt, wozu für jeden beteiligten Spielstein ein Würfel geworfen wird. Die dabei erzielten Wurfergebnisse werden, getrennt für Angreifer und Verteidiger, in absteigender Größe sortiert, um dann - soweit möglich - paarweise miteinander verglichen zu werden. Jedes Ergebnispaar entscheidet ein Duell zwischen jeweils einem angreifenden und einem verteidigenden Stein, wobei der Angreifer genau dann gewinnt, wenn sein betreffender Wurf höher ist. Beispielsweise führt ein 3:2-Angriff mit den Würfen 6-4-2 gegen 4-4 dazu, dass sowohl Angreifer wie Verteidiger je einen Stein vom Spielplan entfernen müssen: 6 gewinnt gegen 4, der Gleichstand 4 gegen 4 führt zum Verlust des Angreifers.

Soweit ein Überblick über die Regeln. Wie die Chancen bei einem einzelnen Angriff stehen, zeigt die folgende Tabelle, welche die kombinatorische Situation widerspiegelt:

Verhältnis		Verl	ust c	les '	Verteid	ligers
Angreifer:					Erwar-	Standard-
Verteidiger	0	1	2	3	tung	abweichung
1:1	21	15			0,42	0,49
1:2	161	55			0,25	0,44
1:3	1071	225			0,17	0,38
2:1	91	125			0,58	0,49
2:2	581	420	295		0,78	0,79
2:3	4816	1981	979		0,51	0,71
3:1	441	855			0,66	0,47
3:2	2275	2611	2890		1,08	0,81
3:3	17871	12348	10017	6420	1,11	1,07

Im fortgeschrittenem Stadium einer Risiko-Partie wächst die Gesamtzahl der Spielsteine auf dem Spielfeld erfahrungsgemäß stark an. Wie chancenreich dabei längere Duelle zwischen zwei stark besetzten Ländern sind, kann mit Hilfe des zentralen Grenzwertsat-

Nähere Beschreibungen und Illustrationen findet man bei Erhard Gorys, Das große Buch der Spiele, Hanau ca. 1987, S. 283-286; David Pritchard, Tom Werneck: Das große Familienbuch der Spiele, München 1983 (engl. Original: 1983), S. 196; Spielbox, 1983/3, S. 22; Roberto Convenevole, Francesco Bottone, La storia di risiko, Rom 2002. Die begriffliche Überarbeitung der deutschen Spielregel erfolgte ungefähr 1982, als eine Indizierung durch die Bundesprüfstelle für jugendgefährdende Schriften drohte.

1.14 Nicht nur beim Roulette: Die Poisson-Verteilung

Bei 37 Roulette-Läufen ist es kaum zu erwarten, dass alle 37 Zahlen einmal getroffen werden. Wie viel verschiedene Zahlen sind es aber im Durchschnitt?

Dass alle Zahlen in 37 Läufen einmal getroffen werden, mag zwar der naiven Vorstellung von gleichen Chancen nahe kommen, tatsächlich ist das Ereignis aber fast vollkommen unmöglich. Denn unter den insgesamt 37^{37} möglichen Ergebnis-Kombinationen gibt es "nur" 37! für das Ereignis günstige – entsprechend jeder Permutation der 37 Roulette-Zahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 37 Zahlen genau einmal getroffen werden, ist daher gleich $37!/37^{37} = 1,304 \cdot 10^{-15}$, das ist 0,000000000000001304. Dazu im Vergleich ist sogar das Ereignis, in zwei Lotto-Ziehungen mit je einem Tipp beidemal einen "Sechser" zu erzielen, noch deutlich wahrscheinlicher.

folgswahrscheinlichkeiten wiedergegeben, die auf Berechungen von Michael Keller zurückgehen, die erstmals in der Zeitschrift *World Game Review* (1983 bzw. 1985) veröffentlicht wurden.

⁵⁷ Eine Analyse des Spiels Risiko auf Basis von Markow-Ketten findet man in Baris Tan: Markov chains and the RISK board game, Mathematics Magazine, 70 (1997), S. 349-357. Der dort gewählte Ansatz ergibt im Prinzip exakte Resultate, allerdings wird bei den einzelnen Würfelrunden von einer leicht verfälschten Wahrscheinlichkeitsverteilung ausgegangen (siehe Table 3 sowie die fälschlicherweise unterstellte Unabhängigkeiten in den Gleichungen auf S. 354 oben). Entsprechend korrigierte Resultate findet man bei Jason A. Osborne, Markov chains and the RISK board game revisted, Mathematics Magazine, 76 (2003), S. 129-135.
In dem in Fußnote 56 genannten Buch La storia di risiko sind auf S. 167-176 Tabellen mit Er-

Wir wissen nun, dass in 37 Roulette-Läufen mit allen 37 Zahlen kaum zu rechnen ist. Wie viele verschiedene Zahlen sind es aber im Durchschnitt? Das heißt, wie groß ist, wenn wir die Anzahl der getroffenen Zahlen als zufällige Größe auffassen, deren Erwartungswert? Greift man zunächst eine feste Zahl heraus, dann lässt sich mit den Formeln der Binomialverteilung berechnen, wie wahrscheinlich die möglichen Trefferhäufigkeiten bei dieser Zahl sind. Ist X die Zahl der Treffer, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(X = k), dass es bei n Versuchen k Treffer auf diese Zahl gibt, gleich

$$P(X = k) = {n \choose k} p^k (1-p)^{n-k}$$
.

Dabei ist im konkreten Fall die Versuchszahl n=37 und die Wahrscheinlichkeit p=1/37. Schon im Zusammenhang mit der Normalverteilung wurde darauf hingewiesen, dass die Formeln der Binomialverteilung in der Praxis etwas schwerfällig zu handhaben sind. Neben der Möglichkeit, die Normalverteilung zu verwenden, bietet sich im vorliegenden Fall noch eine weit einfachere Approximation an, die so genannte **Poisson-Verteilung**. Sie ist benannt nach dem Mathematiker Siméon Denis Poisson (1781-1840). Die Poisson-Verteilung basiert auf der Beobachtung, dass die Wahrscheinlichkeit, in 37 Roulette-Läufen eine bestimmte der 37 Zahlen k-mal zu treffen, fast unverändert bleibt, wenn die Gesamtheit der Zahlen und die Anzahl der Versuche in gleicher Weise vergrößert wird. Das heißt, auch bei 100 Ziehungen aus 100 Zahlen ergeben sich für die Wahrscheinlichkeiten P(X=k) annähernd die gleichen Werte. Wie das diesem Sachverhalt zugrundeliegende Prinzip im Detail aussieht, lässt sich anhand der Formel der Binomialverteilung analysieren. Dazu geht man davon aus, dass das Produkt aus Versuchszahl n und Wahrscheinlichkeit p im Einzelversuch, nämlich $\lambda=np$, einen festen Wert hat – im hier behandelten Beispiel ist $\lambda=1$. Wird nun die Wahrscheinlichkeit p durch den Ausdruck λ/n ersetzt, erhält man die Gleichungskette

$$\begin{split} P(X=k) &= \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k \left(1 \text{--} p \right)^{n \text{--} k} = \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \\ &\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \,. \end{split}$$

Bei der am Schluss durchgeführten Näherung wird der genaue Wert mit Hilfe seines Grenzwertes approximiert, der sich ergibt, wenn die Zahl der Versuche n immer größer wird und sich die Wahrscheinlichkeit $p = \lambda/n$ entsprechend verkleinert – etwa beim Übergang zu einem 370-Zahlen-Roulette und einer verzehnfachten Anzahl von Versuchen und so weiter. Der bei der Approximation gemachte Fehler bleibt sehr gering, wenn die Wahrscheinlichkeit p relativ klein ist; es lässt sich nämlich zeigen, dass alle Abweichungen in ihrer Summe höchstens den Wert $2np^2$ erreichen⁵⁸. Unabhängig davon, wie genau die Approximationen im konkreten Fall sind, können die Näherungswerte für sich gesehen als Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße Y aufgefasst werden. Der Wertebereich umfasst die natürlichen Zahlen k = 0, 1, 2, ... und die Wahrscheinlichkeitsverteilung, eben die Poisson-Verteilung, ist durch die Formel

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Diesen Satz und weiter gehende Erörterungen findet man in Standardwerken der Wahrscheinlichkeitsrechnung wie Ulrich Krengel, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Braunschweig 1988; besonders S. 88 ff. und dort Satz 5.9.

gegeben.

Im behandelten Beispiel, das heißt für den Parameter $\lambda=1$, erhält man die tabellierten Werte. Als Näherungen geben sie an, wie wahrscheinlich es ist, dass in 37 Roulette-Läufen eine bestimmte Zahl k-mal ausgespielt wird. Insbesondere beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl in 37 Läufen überhaupt nicht erscheint, mehr als ein Drittel. Zum Vergleich sind ebenfalls die exakten Werte der Binomial-Verteilung und die daraus resultierenden Fehler angegeben:

k	Poisson-Vert. P(Y = k)	Binomial-Vert. P(X = k)	Fehler (Differenz)
0	0,36788	0,36285	0,00503
1	0,36788	0,37293	0,00505
2	0,18394	0,18647	0,00253
3	0,06131	0,06043	0,00088
4	0,01533	0,01427	0,00106
5	0,00307	0,00262	0,00045
6	0,00051	0,00039	0,00012
7	0,00007	0,00005	0,00003
•••			

Summe (Gesamtfehler): 0,01515

Tabelle 11 Wahrscheinlichkeiten für Mehrfachtreffer bei 37 Roulette-Läufen

Für einzelne Zahlen ist damit geklärt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die möglichen Trefferhäufigkeiten erreicht werden. Wie verhält es sich aber mit der Gesamtheit der Zahlen? Wie viele verschiedene Zahlen sind in 37 Läufen zu erwarten? Mit einem kleinen Trick lässt sich die Antwort sofort aus den schon vorliegenden Daten geben: Dazu definiert man auf der Basis der 37 Läufe die Zufallsgrößen Z_0 , Z_1 , ..., Z_{36} , wobei jede von ihnen den Wert 1 oder 0 annimmt, je nachdem, ob die entsprechende Zahl *genau* einmal ausgespielt wurde oder nicht. Aufgrund der bisherigen Ergebnisse gilt

$$E(Z_0) = E(Z_1) = ... = E(Z_{36}) = 0.37293.$$

Folglich besitzt die Anzahl der genau einmal getroffenen Zahlen $Z_0 + Z_1 + ... + Z_{36}$ den Erwartungswert

$$E(Z_0) + E(Z_1) + ... + E(Z_{36}) = 37 \cdot 0,373 = 13,8,$$

ein Wert, der sich nach dem Gesetz der großen Zahlen in langen Versuchsserien à 37 Spielen ungefähr als Durchschnitt ergeben wird. Annähernd genau so groß ist die zu erwartende Anzahl von Zahlen, die überhaupt nicht getroffen werden. In der Roulette-Literatur wird dieser Sachverhalt als "Zwei-Drittel-Gesetz" bezeichnet: In einer Rotation genannten Serie von 37 Spielen erscheinen demnach etwa zwei Drittel der gesamten Zahlen.

In der alltäglichen Praxis kommt die Poisson-Verteilung vor allem dann zum Einsatz, wenn es darum geht, wie häufig seltene Ereignisse eintreten. Dabei kann es sich sowohl um Versicherungsfälle, eingehende Reparatur-Aufträge an einen Kundendienst oder atomare Zerfallsereignisse handeln. Selten sind jeweils die auf ein Objekt bezogenen Ereignisse, das heißt, die auf einen bestimmten Versicherten, einen bestimmten Kunden beziehungsweise ein bestimmtes Atom bezogenen Ereignisse – aufgrund der hohen Gesamtzahl der Objekte werden die global gezählten Ereignisse dann entsprechend häufig, wobei ihre Wahrschein-

1.15 Wenn Formeln zu kompliziert sind: Die Monte-Carlo-Methode

Zwei Spieler tragen eine Serie von Glücksspielen aus. Gespielt wird jeweils mit einfachem Einsatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler ein Einzelspiel gewinnt, ist 0,52; andernfalls verliert er seinen Einsatz an den Gegner. Zu Beginn verfügt der erste Spieler über ein Kapital von fünf Einsätzen, sein Gegner über 50. Es wird so lange gespielt, bis ein Spieler pleite ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler gewinnt, und wie viele Partien dauert es durchschnittlich bis zum Ruin eines Spielers?

Selbst prinzipiell hoffnungsvolle Gewinnnaussichten schützen nicht vor Pech. Ist das Grundkapital zu klein, kann es durchaus passieren, dass man aufgrund eines vorzeitigen Ruins auf die ersehnte Wirkung des Gesetzes der großen Zahlen "verzichten" muss. Wie aber lässt sich dieses Ruin-Risiko berechnen? Obwohl es auch zu diesem klassischen Problem, das bereits auf Christian Huygens (1629-1695) zurückgeht, Formeln für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gibt, wollen wir hier einen anderen Weg beschreiten. Ganz nach dem Motto "Probieren geht über Studieren" veranstalten wir einfach eine Versuchsreihe von Spielen und werten die Ergebnisse aus. Da das aber doch ein bisschen langwierig werden könnte, spielen wir nicht selbst, sondern überlassen Ausführung und Auswertung einem Computer.

Wie aber bestimmt der Computer die Spielergebnisse? Schließlich hat er keinen eingebauten Würfel. Zwei Möglichkeiten bieten sich an:

Außerhalb des Computers werden Zufallsexperimente durchgeführt, wobei die Ergebnisse für den Computer registriert und aufgezeichnet werden. Will man sich die Arbeit sparen, kann man auch auf Roulette-Permanenzen von Spielkasinos zurückgreifen. Die so erhaltene Liste so genannter **Zufallszahlen** kann man dann für die verschiedensten Untersuchungen, darunter die aktuell anstehende, verwenden.

Der Computer selbst erzeugt die Zufallszahlen. Schon in Kapitel 1.8 wurde darauf hingewiesen, dass sich Berechnung und Zufall eigentlich ausschließen. Allerdings gibt es Rechenprozesse, deren Ergebnisse sich statistisch wie zufällige Zahlen verhalten. Man spricht deshalb auch von Pseudo-Zufallszahlen. Allem Anschein nach, so die Ergebnisse empirischer Untersuchungen, gehören beispielsweise die Dezimalziffern der Zahl π dazu, wobei jede der zehn Ziffern gleichwahrscheinlich zu sein scheint.

In der Praxis wird heute generell nur noch die zweite Methode verwendet, denn bei ihr ist der Aufwand deutlich geringer. Allerdings berechnet man nicht die Ziffern der Zahl π , da es wesentlich einfachere Rechenverfahren gibt, die zugleich den Vorteil haben, dass es über die "Qualität" des mit ihnen erzeugten Zufalls gesicherte Aussagen gibt. Will man nun die Spielserie programmieren, braucht man sich aber um die Zufallszahlen keine großen Gedanken machen, denn jeder Compiler oder Interpreter einer Programmiersprache stellt sie zur Verfügung, beispielsweise liefern die Ausdrücke INT (100*RND(1))+1 in BASIC und Random (99)+1 in PASCAL gleichverteilte, ganze Zufallszahlen zwischen 1 und 100. Das Ergebnis eines einzelnen Spiels wird dadurch simuliert, dass die generierte Zufallszahl mit 52 verglichen wird. Ist sie kleiner oder gleich 52, dann wird ein Gewinn des ersten Spielers angenommen, was damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,52 eintritt. Der Rest des kurzen Programms protokolliert innerhalb der Spielserien die Kapitalstände und wertet schließlich die Ergebnisse statistisch aus. Die folgende Tabelle weist die Ergebnisse einer durchgeführten Computer-Simulation aus:

Anzahl der Spielserien			Gewinn des 2. Spielers
10	567,40	1. Spielers 0,4000	0,6000
100	323,54	0,3600	0,6400
1000	338,16	0,3430	0,6570
10000	326,70	0,3347	0,6653
100000	333,89	0,3344	0,6656

 Tabelle 12
 Ergebnisse einer Simulation zum gestellten Problem

Trotz der für ihn im Einzelspiel leicht vorteilhaften Aussichten hat der erste Spieler also insgesamt eine schlechtere Gewinnchance. Wie genau die experimentell erhaltenen Ergebnisse sind, ergibt sich aus den Überlegungen, wie sie im Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahlen sowie dem zentralen Grenzwertsatz angestellt wurden. Danach ist, sofern eine Versuchsreihe lang genug ist, bei einem Ereignis eine große Abweichung zwischen relativer Häufigkeit und seiner Wahrscheinlichkeit sehr unwahrscheinlich. Um eine hohe Genauigkeit zu erreichen, sind allerdings sehr lange Versuchsreihen notwendig, da sich bei gleichbleibendem Sicherheitsniveau die Genauigkeit erst dann verdoppelt, wenn die Länge der Versuchsreihe vervierfacht wird. Allgemein beträgt, wie wir in Kapitel 1.13 gesehen haben, bei n Versuchen die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von mehr als $2,58/(2\sqrt{n})$ höchstens $2\phi(-2,58) = 0,01$. So ist bei hunderttausend Versuchen der Fehler mit 99-prozentiger Sicherheit kleiner als 0,004.

Wird ein experimentelles Verfahren wie das gerade beschriebene durchgeführt, spricht man von einer **Monte-Carlo-Methode**. Ihr Vorteil liegt darin, dass mit einem universellen Ansatz relativ einfach und schnell ungefähre Ergebnisse erzielt werden können, deren Genauigkeit

1.16 Markow-Ketten und Monopoly

Beim Spiel Monopoly sollen die Straßenzüge nach den zu erwartenden Mieteinnahmen bewertet werden. Was ist zu tun?

Unter den urheberrechtlich geschützten Spielen gehört Monopoly mit insgesamt über 260 Millionen verkauften Exemplaren zu den weltweit meistverkauftesten. Seit seiner Erfindung durch den Amerikaner Charles Darrow im Jahre 1931 hat es zudem die Entwicklung zahlreicher anderer Wirtschaftsspiele beeinflusst, von denen allerdings keines die Verbreitung des Monopoly auch nur annähernd erreichte. Nicht unerwähnt bleiben soll allerdings, dass es auch Vorläufer gab, die aufgrund ihrer Gemeinsamkeiten mit Monopoly den Erfinder inspi-

riert haben dürften. So ist bereits aus dem Jahre 1904 eine Patentschrift über ein "Landlord's Game" bekannt. Dieses Spiel verfügte nicht nur schon über den 40 Felder langen Rundkurs, auch die Eckfelder mit ihren besonderen Funktionen sowie die Bahnhöfe in der Mitte der vier Seiten sind auf dem Spielplan bereits zu finden. Die ebenfalls vorhandenen Versorgungswerke sind gegenüber dem Monopoly um ein Feld verschoben. Außerdem hatte auch das Landlord's Game bereits das Kaufen und Vermieten von 22 Grundstücken zum Thema⁶³

In der Anfangsphase des Monopoly versucht jeder Spieler, Grundstücke – "Straßen" genannt – zu erwerben. Dabei darf immer nur die Straße gekauft werden, auf der man gerade mit seinem Pöppel steht. Landet man beim Würfeln auf einer bereits an einen anderen Spieler verkauften Straße, wird's unangenehm: An den Besitzer wird nämlich Miete fällig. Anfangs sind dies noch relativ geringe Beträge. Besitzt ein Spieler aber komplette, meist drei Straßen umfassende Straßenzüge, dann erhält er für diese Straßen die doppelte Miete. Mit weiteren Investitionen, nämlich dem Bau von Häusern oder Hotels, lässt sich die Miete noch drastischer steigern.

Eine sinnvolle mathematische Analyse von Monopoly muss dem Spieler bei seinen Entscheidungen, die im Wesentlichen den Kauf und Verkauf von Grundstücken – auch von beziehungsweise an Mitspieler – sowie den Bau von Häusern und Hotels betreffen, eine fundierte Entscheidungshilfe geben. Wie im richtigen Wirtschaftsleben sind dazu die entstehenden Kosten mit der zu erwartenden Ertragssteigerung zu vergleichen. Weil Monopoly einen Glücksfaktor beinhaltet, sind bei den Erträgen nur Prognosen auf der Basis von Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten möglich. So ergibt sich die Höhe der Einnahmen, die bei einer bestimmten Bebauung auf einer Straßengruppe zu erwarten ist, aus der Höhe der Miete, die pro "Besuch" fällig wird, und der Wahrscheinlichkeit, dass es zu einem solchen Besuch kommt. Wie hoch sind aber die Wahrscheinlichkeiten für die 40 Felder? Jedenfalls nicht 1/40, denn dazu ist die Symmetrie zu stark gestört – angefangen vom Feld "Gehen Sie in das Gefängnis" über die Ereignis- und Gemeinschaftskarten der Art "Rücken Sie …" bis hin zur Regelung, dass man beim dritten Pasch in Folge ins Gefängnis muss.

Will man die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der 40 Felder bestimmen, dann geht das sicher mit einer Computersimulation am einfachsten. Allerdings können die Wahrscheinlichkeiten auch berechnet werden. Wie das möglich ist, wollen wir uns zunächst an dem weniger komplizierten Beispiel von Bild 3 ansehen.

Informationen zum Landlord's Game: Sid Sackson, Spiele anders als andere, München 1981 (amer. Orig. 1969), S. 18 f; Erwin Glonnegger, Das Spiele-Buch, München 1988, S. 114; Dan Glimme, Barbara Weber, Monopoly - die internationale Geschichte, Spielbox 1995/4, S. 10-14 und 1995/5, S. 4-8; Willard Allphin, Who invented Monopoly?, Games and Puzzles, 1975/3, S. 4-7; Philip Orbanes, The Monopoly companion, Boston 1988, S. 25 ff. Im ASS-Verlag erschien das Landlord's Game 1986 unter dem Titel "Das Original".

Informationen zu Monopoly (siehe auch die Verweise in Fußnote 63): Erhard Gorys, Das Buch der Spiele, Hanau ca. 1987, S. 357-359; Werner Fuchs, Spieleführer 1, Herford 1980, S. 75 f.; David Pritchard, Das große Familienbuch der Spiele, München 1983, S. 186 f.; David Pritchard (ed.), Modern board games, London 1975, S. 85-91 (Beitrag von David Parlett); Mit großen Scheinen und kleinen Steinen, Spielbox 1983/4, S. 8-14 und S. 40-43. Ausschließlich dem Monopoly widmet sich das Buch Maxine Brady, Monopoly, New York 1974, das in deutscher Übersetzung der Monopoly-Ausgabe des Bertelsmann-Buchclubs beiliegt.

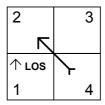


Bild 3 Ein Würfelrundkurs mit 4 Feldern

Beim abgebildeten Rundkurs wird eine Spielfigur in jedem Zug um das Ergebnis eines einzelnen Würfels weitergezogen. Gestartet wird auf dem ersten, mit "LOS" markierten Feld. Kommt die Spielfigur auf dem vierten Feld zum stehen, wird sie auf Feld "2" weitergerückt. Wie beim Monopoly fragen wir nach den Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Spielfigur auf den vier Feldern landet. Nach gleichmöglichen Fällen bei den Feldern zu suchen, führt zu nichts. Fündig wird man natürlich bei den Würfelwerten und wie sich deren Wahrscheinlichkeiten auf den Rundkurs übertragen. Dort bestimmen sie die so genannten Übergangswahrscheinlichkeiten, die angeben, wie wahrscheinlich es ist, von einem Feld auf ein anderes Feld zu kommen. Diese Wahrscheinlichkeiten bleiben immer unverändert, so kommt man vom Feld "1" immer mit der Wahrscheinlichkeit von 2/6, nämlich mit einer Zwei oder einer Sechs, auf das dritte Feld. Dafür, dass eine auf dem zweiten Feld stehende Spielfigur dort verbleibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit sogar 3/6 – entsprechend den Würfen einer Zwei, Vier oder Sechs. Insgesamt ergeben sich die in Tabelle 13 aufgeführten Übergangswahrscheinlichkeiten.

		Feld nach einem Zug							
		1	2	3	4				
D.IJ	1	1/6	1/2	1/3	0				
Feld vor	2	1/6	1/2	1/3	0				
einem	3	1/3	1/2	1/6	0				
Zug	4	1/3	1/2	1/6	0				

 Tabelle 13
 Die Übergangsmatrix zum Würfelrundkurs

Will man nun berechnen, wie wahrscheinlich es ist, nach einer vorgegebenen Zugzahl auf einem bestimmten Feld anzukommen, dann ist das mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten Zug um Zug möglich. Bezeichnen $p_n(1)$, $p_n(2)$, $p_n(3)$ und $p_n(4)$ die Wahrscheinlichkeiten, nach n Würfen auf dem ersten, zweiten, dritten beziehungsweise vierten Feld zu landen, dann wird

- die Anfangssituation, bei der die Spielfigur auf dem ersten Feld steht, durch die Werte $p_0(1) = 1$ und $p_0(2) = p_0(3) = p_0(4) = 0$ wiedergegeben, und
- ein Zug durch die Übergangsgleichungen

$$\begin{split} p_{n+1}(1) &= (&p_n(1) + &p_n(2) + 2p_n(3) + 2p_n(4))/6 \\ p_{n+1}(2) &= (&p_n(1) + &p_n(2) + &p_n(3) + &p_n(4))/2 \\ p_{n+1}(3) &= (2p_n(1) + 2p_n(2) + &p_n(3) + &p_n(4))/6 \\ p_{n+1}(4) &= 0 \end{split}$$

beschrieben⁶⁵.

Nach dem ersten Wurf ergeben sich so die Wahrscheinlichkeiten

$$p_1(1) = \frac{1}{6}$$
, $p_1(2) = \frac{1}{2}$, $p_1(3) = \frac{1}{3}$, $p_1(4) = 0$,

und nach zwei Würfen ist

$$p_2(1)={}^2/_9,\ p_2(2)={}^1/_2\ ,\ p_2(3)={}^5/_{18},\ p_2(4)=0.$$

Die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeiten ist in Tabelle 14 zusammengestellt.

n	p _n (1)	p _n (2)	p _n (3)	p _n (4)
0	1,0000000	0,0	0,0000000	0,0
1	0,1666667	0,5	0,3333333	0,0
2	0,2222222	0,5	0,2777778	0,0
3	0,2129630	0,5	0,2870370	0,0
4	0,2145062	0,5	0,2854938	0,0
5	0,2142490	0,5	0,2857510	0,0
6	0,2142918	0,5	0,2857082	0,0
7	0,2142847	0,5	0,2857153	0,0
8	0,2142859	0,5	0,2857141	0,0
9	0,2142857	0,5	0,2857143	0,0
•••				

 Tabelle 14
 Entwicklung der 4 Zustandswahrscheinlichkeiten des Würfelrundkurses

Wie die Tabelle zeigt, stellt sich mit zunehmender Zugzahl recht schnell eine **stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung** bei den Feldern ein. Obwohl das nicht selbstverständlich ist, muss angemerkt werden, dass mit der Frage nach den vier Wahrscheinlichkeiten für die Felder eigentlich eine solche Stabilität implizit vorausgesetzt wurde. Natürlich ist der beschrittene Weg, diese stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung zu berechnen, recht kompliziert, so dass man überlegen sollte, ob das Ergebnis nicht einfacher bestimmt werden kann. Das ist in der Tat der Fall. Ist nämlich klar, dass es überhaupt eine stationäre Grenzverteilung p(1), ..., p(4) gibt, dann muss sich diese mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten selbst reproduzieren, das heißt, sie muss dem Gleichungssystem

$$p(1) = (p(1)+ p(2) + 2p(3))/6$$

$$p(2) = (p(1)+ p(2) + p(3))/2$$

$$p(3) = (2p(1)+ 2p(2) + p(3))/6$$

$$p(4) = 0$$

zusammen mit der Nebenbedingung

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$$

Nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit (siehe Kapitel 1.9), denn Übergangswahrscheinlichkeiten sind eine spezielle Art von bedingten Wahrscheinlichkeiten.

genügen. Ohne große Schwierigkeiten erhält man daraus direkt als eindeutige Lösung die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(1) = \frac{3}{14}$$
, $p(2) = \frac{1}{2}$, $p(3) = \frac{2}{7}$ und $p(4) = 0$.

Schon das analysierte Beispiel sowie unser eigentliches Thema, das Spiel Monopoly, lassen vermuten, dass die zutage getretenen Erscheinungen Spezialfälle allgemeiner Prinzipien sind, die auch für viele andere Spiele – und natürlich vor allem darüber hinaus – von Bedeutung sind. Bevor wir uns wieder dem Monopoly zuwenden, wollen wir daher einige allgemeine Grundlagen diskutieren, die auf dem russischen Mathematiker Andree Andrejewitsch Markow (1856-1922) zurückgehen, die Theorie der so genannten Markow-Ketten.

Wenn wir bisher Zufallsfolgen untersucht haben, dann handelte es sich meistens um voneinander unabhängige Ereignisse, wie man sie beispielsweise bei einer Serie von Würfelversuchen erhält – der Würfel besitzt eben kein "Gedächtnis". Ganz anders verhält sich die
Situation, wenn man den Standort der Spielfigur auf dem Rundkurs untersucht. Hier sind die
Ereignisse, nach n Würfen auf einem bestimmten Feld anzukommen, nicht davon unabhängig, wo man nach einer anderen Wurfzahl m steht. Allerdings, und das ist die hervorzuhebende Eigenschaft, kommt immer nur dem unmittelbar letzten Standort eine Bedeutung zu,
die Historie davor spielt für den weiteren Verlauf keine Rolle mehr. Die Abhängigkeit innerhalb der Zufallsfolge ist damit qualitativ begrenzt, nämlich durch ein "Gedächtnis", das immer genau einen Zug lang währt. Ein allgemeines Modell für solche Situationen geben die
Markow-Ketten:

Bei einer **Markow-Kette** handelt es sich um eine Folge von zufälligen Versuchen, bei denen jeweils genau eins von insgesamt endlich vielen Ereignissen eintritt. Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit, dass im (n+1)-ten Versuch ein bestimmtes Ereignis eintritt, nur von dem im n-ten Versuch eingetretenen Ereignis ab, nicht aber darüber hinaus auch von den davor eingetretenen. Das heißt, die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das im (n+1)-Versuch eingetretene Ereignis sind unabhängig davon, ob sich die Bedingtheit nur auf das im n-ten Versuch eingetretene Ereignis bezieht oder ob zusätzlich auch die weiter zurückliegenden Versuche mit einbezogen werden.

Für Markow-Ketten hat sich eine spezielle, der Physik entlehnte Terminologie eingebürgert. Dabei wird der Eintritt eines Ereignisses als Aufenthalt in einem **Zustand** interpretiert. Man erhält so ein System, das sich immer in einem von endlich vielen Zuständen befindet und dessen Zustandsänderungen zu feststehenden Zeitpunkten schrittweise in zufälliger Weise stattfinden. Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit, das sich das System von einem in einen anderen Zustand bewegt, nur von diesen beiden Zuständen ab – nicht aber vom Zeitpunkt oder der weiter zurückliegenden Vorgeschichte. Mathematisch besteht eine Markow-Kette daher aus nichts anderem als einer quadratischen Tabelle von Übergangswahrscheinlichkeiten, auch **Übergangsmatrix** genannt (weitere mathematische Details sind im Kasten *Kleines Einmaleins der Markow-Ketten* zu finden).

Im Beispiel des untersuchten Rundkurses umfasst die Markow-Kette vier Zustände, die den Feldern entsprechen, wobei der aktuelle Zustand der Markow-Kette durch den Standort der Spielfigur bestimmt wird. Die Übergangsmatrix wurde bereits tabelliert. Ein weiteres Beispiel für eine Markow-Kette ist das im letzten Kapitel untersuchte Leiterspiel, aber auch das dort erörterte Ruin-Problem kann als Markow-Kette gesehen werden, wenn die aktuelle Kapitalverteilung als Zustand angesehen wird (siehe Kästen).

Um die Entwicklung einer Markow-Kette zu untersuchen, werden die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, das sind die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das System im n-ten Versuch in einen bestimmten Zustand befindet, berechnet. Häufig reicht es allerdings bereits aus, die tendenzielle Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zu ergründen. So konnte für die Markow-Kette des Rundkurses aus den Übergangswahrscheinlichkeiten eine stationäre Zustandsverteilung bestimmt werden, die sich auf Dauer sogar einstellt. Beim Leiterspiel und dem Ruin-Problem stellen sich dagegen andere Probleme.

Das Leiterspiel als Markow-Kette

Neben den 100 Feldern bildet die Startsituation einen Zustand, so dass man insgesamt eine Markow-Kette mit 101 Zuständen erhält. Die Übergangsmatrix besteht damit aus 101·101 = 10201 Wahrscheinlichkeiten, so dass hier nur ein Teil tabelliert werden kann. Man beachte, dass wie bei allen Übergangsmatrizen die Wahrscheinlichkeiten innerhalb einer Zeile immer die Summe 1 besitzen:

			Fe	ld n	ach	eir	iem	Zug			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	•••	100
Feld 0	0	0	1/6	1/6	0	1/6	1/6	0	0		0
vor 1 einem	0	0	1/6	1/6	0	1/6	1/6	1/6	0		0
Zug 2	0	0	0	1/6	0	1/6	1/6	1/6	1/6		0
:		:	:	:	:	:	:	:	:		· ·
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1

Mit Hilfe dieser Daten kann ausgehend von den anfänglichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $p_0(0) = 1$ und $p_0(1) = p_0(2) = ... = p_0(100) = 0$ wie beim untersuchten Rundkurs Zug um Zug die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet werden. Als stationäre Grenzverteilung ergibt sich p(0) = p(1) = p(2) = ... = p(99) = 0 und p(100) = 1, das heißt, irgendwann kommt jeder ins Ziel. Wichtiger aber ist, dass man aus der sukzessiven Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spieldauer sowie deren Erwartungswert 39,224 berechnen kann.

Das Ruin-Problem als Markow-Kette

Das im letzten Kapitel durch eine Simulation gelöste Problem wird hier in verallgemeinerter Version behandelt. Ausgegangen wird von einem Gesamtkapital von n Einsätzen und einer Wahrscheinlichkeit von p, dass der erste Spieler ein Einzelspiel gewinnt; die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust beträgt dann q=1-p. Diesem Ruin-Problem entspricht eine Markow-Kette mit n+1 Zuständen, wobei der aktuelle Zustand durch den Kapitalstand des ersten Spielers gegeben wird – beim Stand 0 ist er ruiniert, beim Stand n sein Gegner. Die Übergangsmatrix sieht wie folgt aus:

		Zustand			einer			
	0	1	2	3		n-2	n-1	n
Zustand 0	1	0	0	0		0	0	0
vor . 1	q	0	р	0		0	0	0
einem 2	0		_		•••	0	0	0
Übergang ²		q	0	р				
:	:	•		:	:			:
n-2	0	0	0	0		0	p	0
n-1	0	0	0	0		q	0	p
n	0	0	0	0		0	0	1

Anders als bei den anderen Beispielen gibt es keine eindeutig bestimmte Grenzverteilung, da es von der anfänglichen Kapitalverteilung abhängt, wie sich die beiden Ruinwahrscheinlichkeiten zueinander verhalten. Sie zu berechnen, ist nicht besonders schwierig: Ist r(k) die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler seinen aktuellen Kapitalstand von k Einsätzen im weiteren Verlauf vollständig verspielt, dann lässt sich

$$r(0) = 1$$
 und $r(n) = 0$

aussagen, da in beiden Fällen das Spiel bereits zu Ende ist. Für 0 < k < n lässt sich die Wahrscheinlichkeit r(k) aus r(k-1) und r(k+1) berechnen, wenn man den Verlauf des unmittelbar nächsten Einzelspiels zugrundelegt:

$$r(k) = q \cdot r(k-1) + p \cdot r(k+1).$$

Für q>0 erhält man daraus die allgemeine Formel^{XI}

$$r(k) = \frac{1+s+ \dots + s^{n-k+1}}{1+s+ \dots + s^{n-1}} \text{ mit } s = \frac{p}{q}.$$

Auch für die zu erwartende Dauer d(k) bis zum Ruin kann eine allgemeine Formel hergeleitet werden. Offensichtlich sind zunächst die Werte d(0) = 0 und d(n) = 0. Im Fall von 0 < k < n untersucht man wieder den Verlauf des nächsten Spiels:

$$d(k) = p \cdot d(k+1) + q \cdot d(k-1) + 1.$$

Für $p \neq q$ ergibt sich daraus die Formel^{XII}

$$d(k) = \frac{1}{q \cdot (s-1)} \cdot \left(n - k - \frac{n \cdot \left(s^{n-k} - 1\right)}{s^n - 1}\right);$$

im Fall p = q = 1/2 ist einfach $d(k) = n \cdot (n-k)$.

Für das konkrete Beispiel des letzten Kapitels, das heißt p = 0.52 und n = 55, lassen sich daraus die Werte r(5) = 0.6661 und d(5) = 334,1304 berechnen.

Beim Monopoly, dem wir uns nun wieder zuwenden wollen, muss zunächst geklärt werden, welche Zustände zu unterscheiden sind. Komplikationen ergeben sich dadurch, dass bei einem Pasch nach dem Zug nochmals gewürfelt wird. Ebenso wird bei einem weiteren Pasch verfahren. Ein dritter Pasch wird allerdings nicht mehr gezogen – stattdessen wandert der Spieler sofort ins Gefängnis. Einmal an der Reihe, kann ein Spieler also auf einem, zwei oder drei Feldern zum Stehen kommen, und zwar mit allen Rechten und Pflichten. Er kann damit bis zu zwei Straßen auf einmal kaufen oder eben auch bis zu zweimal zum Miete-Zahlen vergattert werden! Aus diesem Grund konstruiert man eine Markow-Kette, bei der ein Über-

	Straße	Straße	Wahr.	Wahr.	maxima	ale Mie	te (dt.)
	(deutsche Ausgabe)	(US-Ausgabe)	(dt.)	(US)	absolut	Erw.	Gruppe
0	Los	Go	0,02889	0,02914			
1	Badstr.	Mediterranean Avenue	0,02436	0,02007	5000	122	
2	Gemeinschaftsfeld	Community Chest	0,01763	0,01775			
3	Turmstr.	Baltic Avenue	0,02040	0,02037	9000	184	305
	Einkommenssteuer	Income Tax	0,02210	0,02193			
5	Südbahnhof	Reading Railroad	0,02686	0,02801	4000	107	
	Chausseestr.	Oriental Avenue	0,02169	0,02132	11000	239	
	Ereignisfeld	Chance	0,00972	0,00815			
8	Elisenstr.	Vermont Avenue	0,02246	0,02187	11000	247	
	Poststr.	Connecticut Avenue	0,02217	0,02168	12000	266	752
10	Nur zu Besuch	Just visiting	0,02184	0,02139			
	Seestr.	St. Charles Place	0,02596	0,02556	15000	389	
	Elektrizitäts werk	Electric Company	0,02378	0,02614	1400	33	
	Hafenstr.	States Avenue	0,02213	0,02174	15000	332	
	Neue Str.	Virginia Avenue	0,02457	0,02426	18000	442	1164
15	Westbahnhof	Pennsylvnia Railroad	0,02531	0,02635	4000	101	
	Münchener Str.	St. James Place	0,02703	0,02680	19000	514	
	Gemeinschaftsfeld	Community Chest	0,02306	0,02296			
	Wiener Str.	Tennessee Avenue	0,02821	0,02821	19000	536	
	Berliner Str.	New York Avenue	0,02794	0,02812	20000	559	1608
20	Frei parken	Free parking	0,02806	0,02825			
21	Theaterstr.	Kentucky Avenue	0,02594	0,02614	21000	545	
	Ereignisfeld	Chance	0,01209	0,01045			
	Museumsstr.	Indiana Avenue	0,02549	0,02567	21000	535	
24	Opemplatz	Illinois Avenue	0,02983	0,02993	22000	656	1736
	Nordbahnhof	B. and O. Railroad	0,02718	0,02893	4000	109	
	Lessingstr.	Atlantic Avenue	0,02540	0,02537	23000	584	
	Schillerstr.	Ventnor Avenue	0,02521	0,02519	23000	580	
28	Wasserwerk	Water Works	0,02480	0,02651	1400	35	68
	Goethestr.	Marvin Gardens	0,02441	0,02438	24000	586	1750
	Gefängnis	Jail	0,09422	0,09457			
	Rathausplatz	Pacific Avenue	0,02501	0,02524	25500	638	
	Hauptstr.	North Carolina Av.	0,02438	0,02472	25500	622	
	Gemeins chafts feld	Community Chest	0,02193	0,02228			
	Bahnhofstr.	Pennsylvania Av.	0,02312	0,02353	28000	647	1907
	Hauptbahnhof	Short Line Railroad	0,02243	0,02291	4000	90	407
	Ereignis feld	Chance	0,00934	0,00816			
	Parkstr.	Park Place	0,02023	0,02060	30000	607	
	Zusatzsteuer	Luxury Tax	0,02023	0,02052			
39	Schloßallee	Boardwalk	0,02457	0,02483	40000	983	1590

Tabelle 15 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und Mieten beim Monopoly: Die maximalen Mieten beziehen sich auf komplette Serien (mit Hotels bei normalen Straßen bzw. einer Wurfzahl 7 bei den Versorgungswerken). Die Gesamterwartungen stehen jeweils rechts der letzten Straße der betreffenden Gruppe.

gang genau den Auswirkungen eines Wurfes entspricht. Eventuell weitere Zwischenstationen auf Ereignis- oder Gemeinschaftsfeldern brauchen nicht explizit erfasst zu werden. Sollte man dort eine Transferkarte wie "Rücke vor zur Schloßallee" ziehen, dann kann dieses Weiterziehen zusammen mit dem eigentlichen Wurf als ein Übergang betrachtet werden, ohne dass sich dadurch die Miet-Erwartungen ändern.

Umfasst innerhalb der Markow-Kette ein Übergang immer genau die Auswirkungen eines Wurfs, dann muss der aktuelle Zustand jene Informationen umfassen, die notwendig sind, um den nächsten Wurf gemäß den Spielregeln ausführen zu können. Neben dem aktuellen Standort gehört dazu auch die Angabe darüber, ob dieser mit einem Pasch oder gar einem zweiten Pasch in Folge erreicht wurde. Jedem Feld entsprechen also drei Zustände – "ohne Pasch erreicht", "mit Pasch, aber nicht mit Folgepasch erreicht", "mit Folgepasch erreicht". Auch im Sonderfall "Im Gefängnis" ergeben sich drei Zustände, da man bis zu drei Versuche hat, mit einem Pasch herauszuwürfeln⁶⁶.

Streng genommen unterteilen sich die bisher erkannten Zustände noch weiter. Grund dafür sind die schon erwähnten Transferkarten unter den je 16 Ereignis- und Gemeinschaftskarten. Sind einige bereits vom Stapel gezogen worden, dann ändern sich die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Feldern geringfügig. Ohne dass ein großer Fehler entsteht, kann man aber annehmen, dass Karten immer von einem vollständigen und gerade durchgemischten Kartenstapel gezogen werden.

Um die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Straßen berechnen zu können, muss also eine Markow-Kette mit $3\cdot40=120$ Zuständen untersucht werden – ohne Computer sicherlich ein hoffnungsloses Unterfangen. Die Wahrscheinlichkeiten der Zustandsübergänge ergeben sich, wenn man die Würfelwahrscheinlichkeiten auf das Spielfeld überträgt und dabei die Sonderfälle wie Pasch und Transferkarten berücksichtigt. Die natürliche Gliederung eines Überganges in eigentlichen Wurf und die anschließenden Transfers behält man in den Berechnungen am besten bei. Um die Iteration zu beschleunigen, kann man mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung starten, die dem mutmaßlichen Ergebnis nahe kommt, beispielsweise mit 3/42 für das Gefängnis und 1/42 für jedes andere Feld. Die sich schließlich ergebenden Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder sind in Tabelle 15 zusammengestellt. Da sich die Zusammensetzung der Ereignis- und Gemeinschaftskarten mehrfach geändert hat, sind zwei Varianten aufgeführt $^{\rm XIII.}67$.

42 Zuständen, deren Resultate nur unwesentlich ungenau sind; siehe dazu: Steve Abott, Matt Ri-

Da im Gefängnis Miete kassiert werden darf, aber keinesfalls welche fällig wird, ist es für einen Spieler in der Endphase günstig, möglichst viel Zeit dort zu verbringen. Die Möglichkeit eines unmittelbaren Freikaufs sollte man daher nicht wahrnehmen.

Die Ergebnisse der amerikanischen Ausgabe wurden bereits mehrfach publiziert: Robert B. Ash, Richard L. Bishop, Monopoly as a Markov process, Mathematics Magazine, 45 (1972), S. 26-29. Bishop vergleicht unter anderem, wie sich die beiden Gefängnis-Strategien – so lange bleiben wie möglich oder direkt heraus – auf die Zahlungsbilanz auswirken. Eine ausführliche Version ist als Skript erschienen. Dort sind auch kleinere Ungenauigkeiten des Zeitschriftenartikels korrigiert. Irvin R. Hentzel, How to win at Monopoly, Saturday Review of Sciences, April 1973, S. 44 - 48. Dr. Crypton, How to win at Monopoly, Science Digest, Sept. 1985, S. 66-71. Die Ergebnisse von Hentzel werden auch im Buch von Maxine Brady (s. Fußnote 64) verwendet, und zwar unverändert auch für die deutsche Ausgabe (siehe dort Seite 110). Im Buch von Orbanes (siehe Fußnote 63) sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Straßenzüge angegeben. Es ist nahe liegend, die Wahrscheinlichkeiten für drei Paschs in Folge bei allen Feldern mit Ausnahme des Gefängnisses als annährend gleich anzunehmen. Das entspricht einer Markow-Kette mit

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Felder unterscheiden sich zum Teil sehr deutlich. Bei den eigentlichen Straßen der deutschen Ausgabe reichen sie von 0,02023 für die Parkstraße bis hin zu 0,02983 für den Opernplatz – das ist immerhin ein relativer Unterschied von 47%! Ein Hotel auf dem Opernplatz besitzt daher sogar eine höhere Mieterwartung als eines in der Parkstraße, nämlich pro Wurf 656 gegenüber 607 DM. Allgemein haben die Straßen zwischen dem Gefängnis und dem gegenüberliegenden Feld "Gehen sie in das Gefängnis" relativ hohe Besuchswahrscheinlichkeiten. Besonders hohe Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für Straßen, die vom Gefängnis aus mit einem Pasch oder besonders wahrscheinlichen Würfelkombinationen erreicht werden. Im speziellen Fall des Opernplatzes, der 14 Felder hinter dem Gefängnis liegt und damit häufig in zwei Zügen vom Gefängnis erreicht wird, kommt noch die Ereigniskarte "Rücke vor zum Opernplatz" hinzu.

Wie sind die berechneten Mieterwartungen zu interpretieren? Wie können auf ihrer Basis Entscheidungen optimiert werden, wie sie insbesondere beim Grundstückshandel sowie beim Bauen zu fällen sind? Natürlich sind aufgrund der hohen Komplexität, die ein von mehreren Personen gespieltes Monopoly beinhaltet, im Hinblick auf das Spielziel, nämlich dem letztlich angestrebten Ruin der Mitspieler, nur tendenzielle Aussagen möglich. Dabei muss der Nutzen, der von einer Investition ausgeht, je nach Spielphase differenziert bewertet werden:

- In frühen Spielphasen, wenn die ersten Häuser gebaut werden, sind die Kapitaldecken aller Spieler meist recht eng. Vordringliches Ziel der Spieler ist es daher, die weitere Liquidität sicherzustellen. Investitionen werden darauf geprüft, wie man ausgehend vom vorhandenen oder kurzfristig verfügbaren Budget seine Mieterwartung am meisten steigern kann. Beispielsweise wird der Bau eines Hauses nach seiner Rendite bewertet, das heißt danach, wie schnell die zusätzliche Mieterwartung die Baukosten amortisiert.
- In späteren Spielphasen, wenn insgesamt mehr Geld in Umlauf ist, geht es vor allem darum, die Mitspieler in den Ruin zu treiben. Einmalig entstehende Kosten, insbesondere wenn sie für Häuser an die Bank gezahlt werden, fallen im Vergleich zu den dauerhaften Einnahmen aus Mieten kaum ins Gewicht. Investitionen werden deshalb auf der Basis der Einnahmen, also der absoluten Mieterwartungen bewertet. Insbesondere werden, wenn immer möglich, Hotels gebaut⁶⁸.

Tabelle 16 enthält für die acht Straßengruppen sowohl die absoluten Mieterwartungen als auch die prozentualen Renditen zusätzlicher Häuser. Alle Werte beziehen sich auf einen Zug eines Spielers und damit im Durchschnitt auf 1,1869 Würfe⁶⁹. Bei einem Vergleich mit den notwendigen Kosten ist auch die Zahl der Spieler zu berücksichtigen. Je mehr Personen mitspielen, desto schneller rentieren sich gemachte Investitionen.

chey, *Take a walk on the Boardwalk*, The College Mathematical Journal, <u>28</u> (1997), S. 162-171. Noch stärkere Vereinfachungen macht Ian Stewart in seinen beiden Artikeln *How fair is Monopoly?*, Scientific American, 1996/4, S. 86-87; *Monopoly revisted*, Scientific American, 1996/10, S. 92-95 (übersetzt in: Ian Stewart, *Die wunderbare Welt der Mathematik*, München 2006, S. 123-149); siehe auch *Feedback*, Scientific American, 1997/4, S. 104.

Eine Ausnahme ergibt sich durch die Möglichkeit, durch Bebauung mit jeweils vier Häusern den insgesamt begrenzten Häuservorrat für die Mitspieler zu blockieren.

Innerhalb der Markow-Kette lassen sich die ersten Würfe eines Zuges als diejenigen Übergänge lokalisieren, die von den 39 "ohne Pasch erreicht"-Zuständen oder einem der drei Gefängnis-Zustände ausgehen. Für sie ergibt sich bei der stationären Zustandsverteilung ein Anteil von 0,8425.

	Miet- erwartung	Rendite eines weiteren Hauses (in Prozent pro Zu					
	bei Hotels	1.	2.	3.	4.	5.	
lila	362	0,5	1,5	4,6	5,4	5,7	
hellblau	892	1,0	3,1	9,8	7,2	7,9	
violett	1381	0,9	3,1	8,8	5,3	4,3	
orange	1909	1,4	4,4	11,9	6,6	6,6	
rot	2061	1,2	3,7	9,6	3,8	3,8	
gelb	2077	1,3	4,5	9,4	3,5	3,5	
grün	2263	1,2	3,9	7,5	2,9	2,6	
dunkelblau	1887	1,4	4,9	9,4	3,4	3,4	

Tabelle 16 Die Mieterwartung bei den verschiedenen Straßengruppen und die Renditen beim Bau eines weiteren Hauses

Anlage		Rendite
Farbe	Häuser	(% pro Zug)
orange	15.	6,2
hellblau	15.	5,8
dunkelblau	13.	5,2
gelb	13.	5,1
rot	13.	4,9
violett	15.	4,5
grün	13.	4,2
rot	45.	3,8
lila	15.	3,6
gelb	45.	3,5
dunkelblau	45.	3,4
grün	45.	2,7

 Tabelle 17
 Vergleich der Renditen: Wo man zuerst bauen sollte

Sollte man in der glücklichen Lage sein, schon frühzeitig zwischen mehreren Bauvorhaben auswählen zu können, dann kann die Rangfolge der Renditen aus Tabelle 17 ersehen werden⁷⁰.

Dass im Buch von Maxine Brady und im Artikel der Spielbox 1983/4, S. 40 ff. (siehe Fußnote 64) andere Rangfolgen angegeben werden, hat im Wesentlichen den Grund, dass dort auch der Kaufpreis der Straßen bei den Investitionen berücksichtigt wird. Da beim Bau des Hauses die Besitzrechte aber schon meist vorliegen, Besitzrechte zum Teil ohne festen Preis versteigert werden und schließlich oft aus rein strategischen Gründen – zur Blockade der Mitspieler – erworben werden müssen, wurde dieser Ansatz hier nicht verfolgt. Sollten vor dem Bau beispielsweise Hypotheken extra für diesen Zweck aufgelöst werden, dann sind diese Kosten natürlich den Investitionen hinzuzuzählen.

Außerdem setzt Brady statt der Mietsumme die durchschnittliche Miete der Straßen ins Verhältnis zu den Gesamtkosten. Dadurch erscheinen die Zweier-Gruppen, nämlich lila und dunkelblau, günstiger als sie in Wahrheit sind.

1.17 Black Jack: Ein Märchen aus Las Vegas

In Spielkasinos gilt Black Jack als das Spiel mit den besten Gewinnchancen. Es wird sogar behauptet, dass es Spielstrategien gebe, bei denen die Chancen des Spielers die der Bank übertreffen. Kann so etwas überhaupt möglich sein?

Das Kartenspiel Black Jack ist eng mit dem deutschen Siebzehn-und-Vier verwandt. Gemeinsames Ziel beider Spiele ist es, so lange Karten zu ziehen, bis man eine möglichst hohe, aber keinesfalls eine 21 übersteigende Zahl von Kartenpunkten erreicht hat. Dabei zählen beim Black Jack die Karten 2 bis 10 mit ihrem Wert, jedes Bild zählt 10 und das Ass wahlweise 1 oder 11 Punkte⁷¹. Werden 21 Punkte mit nur zwei Karten erreicht, spricht man von einem Black Jack. Diese Kartenkombination aus Ass sowie Bild oder 10 übersteigt in seiner

⁷¹ Siebzehn-und-Vier wird dagegen meist nur mit einem Skat-Blatt gespielt. Der Bube z\u00e4hlt 2, die Dame 3, der K\u00f6nig 4 Punkte. Das Ass z\u00e4hlt immer 11 Punkte.

Wertigkeit andere Blätter mit 21 Punkten. In amerikanischen Spielkasinos, in denen Black Jack seit etwa 1920 gespielt wird, erfreut sich Black Jack einer großen Popularität. Aber auch in fast jedem europäischen Kasino gehört Black Jack zum Spielangebot.

Black Jack wird in Kasinos als Bankspiel veranstaltet, das heißt, man spielt gegen einen Angestellten des Kasinos. Im Allgemeinen können bis zu sieben Personen gleichzeitig versuchen, eine Kartenkombination zu ziehen, welche die der Bank übertrifft. Im Einzelnen verläuft das Spiel wie folgt: Zunächst setzt jeder der Teilnehmer einen Einsatz im Rahmen des festgesetzten Limits. Im eigentlichen Spiel zieht der Bankhalter vom verdeckten Stapel die benötigen Karten und legt sie alle offen hin: Zunächst für jeden Spieler eine, dann eine für sich selbst und anschließend für jeden Spieler eine weitere⁷². Auf Wunsch können die Spieler noch weitere Karten anfordern - je nachdem wie sie ihre Chancen in Anbetracht ihres eigenen Blattes und der ersten Karte der Bank beurteilen. Ein Spieler, der sich "verkauft", das heißt 21 überschreitet, hat sofort verloren. Möchte kein Spieler mehr eine Karte ziehen, zieht die Bank für sich selbst. Sie hat dabei allerdings keine echte Entscheidungsmöglichkeit, da sie bis einschließlich 16 ziehen muss und ab 17 nicht mehr ziehen darf. Dabei muss ein im Blatt vorkommendes Ass mit 11 gezählt werden, es sei denn, 21 würde auf diese Weise überschritten. Ist auch die Bank mit dem Ziehen fertig, wird jeder Spieler, der sich nicht verkauft hat, einzeln abgerechnet: Ein Spieler, der das Blatt der Bank übertrifft, erhält zu seinem Einsatz einen Gewinn in gleicher Höhe hinzu. Geschieht dies mit einem Black Jack, erhält er sogar den 1,5-fachen Einsatz. Bei Gleichstand erhält der Spieler seinen Einsatz zurück. Ist das Blatt der Bank besser, geht der Einsatz verloren.

Anders als beim Roulette haben die Spieler also einen erheblichen strategischen Einfluss, da sie entscheiden, ob sie noch weitere Karten ziehen wollen oder nicht. Um das Spiel noch vielseitiger und damit interessanter zu machen, gibt es noch drei Sonderregeln:

Versichern (insurance): Ist die erste Karte der Bank ein Ass, dann wird diese mit einer relativ hohen Wahrscheinlichkeit, nämlich bei vier der 13 Kartenwerte als zweite Karte, einen Black Jack erhalten. Um sich vor diesem drohenden Verlust zu schützen, können die Spieler sich gegen einen Black Jack versichern. Durch Zahlung eines zusätzlichen Einsatzes, der halb so hoch wie der ursprüngliche ist, erhält ein Spieler bei einem Black Jack der Bank seinen dann verlorenen Spieleinsatz zusammen mit dem Versicherungseinsatz zurück. Ohne Black Jack der Bank geht der Versicherungseinsatz verloren, während der ursprüngliche Spieleinsatz normal abgerechnet wird.

Doppeln (doubling down): Ergeben die ersten beiden Karten eine Summe von 9, 10 oder 11 Punkten, wobei ein Ass gegebenenfalls dafür wie 1 gezählt werden kann, dann darf der Spieler den Einsatz verdoppeln. Anschließend darf er allerdings nur noch eine Karte ziehen.

Teilen (splitting): Weisen die ersten beiden Karten den gleichen Wert auf, kann der Spieler sie in zwei Blätter teilen, wobei er für das zusätzliche Blatt einen Einsatz nachentrichten muss. Das heißt, er zieht anschließend für beide Blätter getrennt weitere Karten. Allerdings zählt ein so erreichter Black Jack nur wie normale 21 und zu einem geteilten Ass darf nur

⁷² In amerikanischen Spielkasinos ist es üblich, dass sich die Bank ebenfalls eine zweite Karte nimmt. Diese bleibt für die Spieler zunächst verdeckt, es sei denn, dass sich ein Black Jack der Bank ergibt. Im Vergleich zur europäischen Variante erhalten die Spieler damit geringfügig mehr Informationen: Deckt die Bank trotz einer 10 oder einem Ass als erste Karte nicht direkt auf, dann wissen die Spieler, dass die Bank keinen Black Jack erzielt hat.

noch eine weitere Karte gezogen werden. Außerdem ist in einigen Spielkasinos mehrfaches Teilen hintereinander oder ein Doppeln nach einem Teilen nicht erlaubt.

Höchst bemerkenswert ist noch das Verfahren, wie die Karten gezogen werden. Es wird nämlich nicht für jedes Spiel neu gemischt, sondern es werden gleich mehrere, meist sechs Kartenspiele mit je 52 Karten vermischt, von denen etwa ein Fünftel mit einer neutralen Karte abgetrennt wird. Es wird nun so lange mit dem Kartenstapel gespielt, bis die neutrale Karte erscheint. Nach dem Ende des gerade laufenden Spiels wird neu gemischt.

Black Jack ist ein für Spieler und Bank fast symmetrisches und damit ausgeglichenes Spiel. Außerdem scheinen die nicht symmetrischen Teile des Black Jack den Spieler zu bevorteilen, was sicher der Attraktivität des Black-Jack-Spiels zugute kommt:

- Der Spieler gewinnt bei einem Black Jack 1,5-fach zu seinem Einsatz hinzu.
- Die Bank muss nach einer festgelegten Strategie weitere Karten ziehen.
- Der Spieler kennt beim Ziehen die erste Karte der Bank.
- Die Bank darf weder teilen noch doppeln.

Der einzige, zunächst recht unscheinbare, letztlich aber umso gewichtigere Vorteil der Bank beruht darauf, dass die Bank auf jeden Fall gewinnt, wenn der Spieler sich verkauft, auch dann, wenn sie selbst die Grenze 21 überschreitet. Es erscheint daher plausibel, dass der Spieler im Durchschnitt etwas defensiver spielen sollte als die Bank. Eine gute Strategie wird sich außerdem an der ersten Bank-Karte orientieren, da diese wesentliche Information über das mutmaßliche Abschneiden der Bank enthält.

Eine mathematische Analyse des Black Jack beginnt am besten mit der Bank, deren Spielresultate in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt werden. Im einfachsten Fall geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kartenwerte immer konstant gleich 1/13 beziehungsweise 4/13 beim Wert 10 sind. Richtig ist diese Annahme eigentlich nur bei einem unendlich großen Kartenstapel, da sich sonst die Wahrscheinlichkeiten mit jeder ausgespielten Karte ändern. Zulässig ist die Annahme allerdings dann, wenn es gilt, eine feste, im Durchschnitt optimale Strategie in guter Näherung zu berechnen.

Obwohl es passieren kann, dass die Bank zwölf Karten ziehen muss – nämlich in Reihenfolge 6 Asse, eine Sechs und anschließend wieder 5 Asse – sind es meist viel weniger, nämlich selten mehr als vier. Wer will, kann den Ziehvorgang auch als Markow-Kette ansehen, bei der die Zustände den Zwischenergebnissen entsprechen. Neben dem Sonderfall des Black Jacks müssen auch die so genannten Softhands, das sind Blätter mit einem als 11 gezählten Ass, als separate Zustände berücksichtigt werden. Für die Bank ergibt sich dann die in Tabelle 18 aufgeführte Endverteilung:

Bank-Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
17	0,1451
18	0,1395
19	0,1335
20	0,1803
21	0,0727
Black Jack	0,0473
22 oder mehr	0,2816

 Tabelle 18
 Die Wahrscheinlichkeiten für das Spiel der Bank

2 Kombinatorische Spiele

2.1 Welcher Zug ist der beste?

Beim Schach ist der Zug des weißen Königsbauern e2 - e4 eine gebräuchliche Eröffnung. Schwarz kann unter anderem mit einem der Züge e7 - e5, e7 - e6, c7 - c5 oder Sg8 - f6 antworten. Gibt es unter den vier Zügen zwei, die hinsichtlich der Gewinnaussichten absolut gleichwertig sind?



Bild 4 Besitzen zwei Positionen gleichwertige Gewinnaussichten?

Die gestellte Frage unterscheidet sich thematisch stark von den bisherigen. Es wird daher nochmals an die in der Einführung dargelegten Ursachen für die Ungewissheit erinnert, wie sie für Spiele typisch ist. Schach ist ein rein kombinatorisches Spiel, das heißt, die Schwierigkeit, die weitere Entwicklung einer Partie abzuschätzen, resultiert einzig aus der astronomischen Vielfalt möglicher Zugfolgen – Zufall oder verdeckte Spielelemente sind nicht vorhanden.

Sind wir beim Schach am Zug, so haben wir die zukünftigen Züge abzuwägen. Dabei besteht zwischen den eigenen Zügen und denen des Gegners ein wesentlicher Unterschied: Bei den gegnerischen Zügen müssen wir immer mit dem schlimmsten rechnen, also auch mit dem Zug, der für uns am ungünstigsten ist. Insbesondere stellt jeder übersehene Zug des Gegners eine Gefahr dar, denn gerade er könnte die eigene Stellung in Gefahr bringen. Dagegen reicht es bei eigenen Zügen völlig aus, jeweils einen guten Zug zu kennen – weitere Züge müssen dann nicht mehr untersucht werden.

Gut ist ein Zug für uns dann, wenn er letztlich zum gewünschten Ergebnis führt, also zum eigenen Sieg oder – bei geringeren Ansprüchen – zu einem Remis. Solche nachträglichen Kriterien sind für einen Spieler aber wenig hilfreich. Er benötigt vielmehr Kriterien, mit denen er a priori Züge objektiv und absolut, also ohne Bezug auf das weitere Spiel des Gegners, bewerten kann. Beim Schach scheint das möglich, nicht dagegen bei Spielen wie Roulette oder Papier-Stein-Schere. Bei ihnen kann nämlich kein Zug als absolut gut oder schlecht charakterisiert werden, alles hängt vom weiteren Geschehen ab. Gute Spieler, die fast immer gewinnen, gibt es bei diesen Spielen daher nicht. Dagegen lässt ein guter Schachspieler einem ihm unterlegenen praktisch keine Chance. Gleiches gilt für gute Schachprogramme, die von einem Durchschnittsspieler kaum noch zu schlagen sind.

Werden Züge oder Positionen charakterisiert, dann geschieht das meist mit sprachlichen Umschreibungen wie "vorzüglich", "im Vorteil", "etwas besser", "ausgeglichen", "annähernd ausgeglichen" oder "mit Aussicht auf raschen Ausgleich". Dagegen messen Schachprogramme die Gewinnaussichten mit einer Zahl. Gute Züge scheinen also berechenbar zu sein. Dazu Gedanken machte sich übrigens 1836 auch Edgar Allan Poe anlässlich einer Präsentation des berühmten, 1769 vom Baron von Kempelen (1734-1804) konstruierten Schachautomaten. Poe versuchte mit einem Artikel im *Southern Literary Messenger*⁸¹ zu beweisen, dass dieser Automat in der Gestalt eines schachspielenden Türken auf einer Täuschung beruhte. Nachdem Poe den Rechenautomaten des englischen Mathematikers Charles Babbage (1792-1871) gewürdigt hat, vergleicht er ihn mit dem Schachautomaten:

Arithmetische oder algebraische Berechnungen sind ihrem Wesen nach bestimmt. Wenn gewisse Daten gegeben werden, müssen gewisse Resultate notwendig und unausbleiblich folgen. ... Da dies der Fall ist, können wir uns ohne Schwierigkeit die Möglichkeit vorstellen, eine Mechanik zu verfertigen, die von den Daten der Fragen ausgehend richtig und unabweislich zu der Lösung vorschreitet, da dies Vorschreiten, wie verwickelt es auch immer sein mag, doch nach ganz bestimmtem Plane vor sich geht. Bei dem Schachspieler liegt die Sache durchaus anders. Bei ihm ist der Fortschritt in keiner Weise bestimmt. Kein einziger Zug im Schachspiel folgt notwendig aus einem anderen. Wir können aus keiner Stellung der Figuren zu einer Periode des Spiels ihre Stellung zu einer anderen voraussagen.... In genauem Verhältnis zu dem Fortschreiten des Schachspiels steht die Ungewissheit jedes folgenden Zuges. Wenn ein paar Züge gemacht worden sind, so ist kein weiterer Schritt mehr sicher. Verschiedene Zuschauer des Spieles würden verschiedene Züge anraten. Es hängt also alles vom veränderlichen Urteil der Spieler ab. Wenn wir nun annehmen (was nicht anzunehmen ist), dass die Züge des automatischen Schachspielers in sich selbst bestimmt wären, so würden sie doch durch den nicht zu bestimmenden Willen des Gegenspielers unterbrochen und in Unordnung gebracht werden. Es besteht also gar keine Analogie zwischen den Operationen des Schachspielers und denen der Rechenmaschine des Herrn Babbage.

Können die Berechnungen, die durchzuführen eine Maschine nach einem festen Verfahren imstande ist, wirklich vom Wirken des Gegenspielers in Unordnung gebracht werden? Für Spiele wie Papier-Stein-Schere trifft das sicherlich zu, aber auch für Schach? Können auch dort die Züge nur auf der Basis einer mutmaßlichen Gegenstrategie bewertet werden? Oder ist beim Schach das psychologische Einschätzen des Gegners im Prinzip überflüssig? Zweifellos der Fall ist das bei Schachaufgaben und vielen Endspielpositionen. Bei ihnen kann meist einer der Spieler einen Sieg für sich erzwingen, und zwar unabhängig davon, wie sein Gegner spielt. Bei anderen Endspielen lässt sich häufig feststellen, dass beide Spieler ihren Verlust verhindern können, so dass die Partie, vorausgesetzt kein Spieler macht einen Fehler, unentschieden enden wird. Gibt es aber auch Positionen, die vergleichbar der Ausgangssituation bei Papier-Stein-Schere in keine dieser drei Klassen eingeordnet werden können?

Aufgeworfen, präzise formuliert und sogleich beantwortet wurde diese Frage 1912 von dem deutschen Mathematiker Ernst Zermelo (1871-1953). Zu Beginn seines *Eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* betitelten Beitrages zum 5. Internationalen Mathematikerkongress⁸² heißt es:

⁸¹ Zitiert nach Der Schachautomat des Baron von Kempelen, Dortmund 1983.

⁸² E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proceedings

Die folgenden Betrachtungen sind unabhängig von den besonderen Regeln des Schachspiels und gelten prinzipiell ebensogut für alle ähnlichen Verstandesspiel, in denen zwei Gegner unter Auschluss des Zufalls gegeneinander spielen; es soll aber der Bestimmtheit wegen hier jeweilig auf das Schach als das bekannteste aller derartigen Spiele exemplifiziert werden. Auch handelt es sich nicht um irgend eine Methode des praktischen Spiels, sondern lediglich um die Beantwortung der Frage: kann der Wert einer beliebigen während des Spiels möglichen Position für eine der spielenden Parteien sowie der bestmögliche Zug mathematisch-objektiv bestimmt oder wenigstens definiert werden, ohne dass auf solche mehr subjektiv-psychologischen wie die des "vollkommenen Spielers" und dergleichen Bezug genommenen zu werden brauchte? Dass dies wenigstens in einzelnen besonderen Fällen möglich ist, beweisen die sogenannten "Schachprobleme", d.h. Beispiele von Positionen, in denen der Anziehende nachweislich in einer vorgeschriebenen Anzahl von Zügen das Matt erzwingen kann. Ob aber eine solche Beurteilung der Position auch in anderen Fällen, wo die genaue Durchführung der Analyse in der unübersehbaren Komplikation der möglichen Fortsetzungen ein praktisch unüberwindliches Hindernis findet, wenigstens theoretisch denkbar ist und überhaupt einen Sinn hat, scheint mir doch der Untersuchung wert zu sein, und erst diese Feststellung dürfte für die praktische Theorie der "Endspiele" und der "Eröffnungen", wie wir sie in den Lehrbüchern des Schachspiels finden, die sichere Grundlage bilden. Die im folgenden zur Lösung des Problems verwendeten Methoden ist der "Mengenlehre" und dem "logischen Kalkül" entnommen und erweist die Fruchtbarkeit dieser mathematischen Disziplin in einem Falle, wo es sich fast ausschliesslich um endliche Gesamtheiten handelt.

Mit relativ kurzen Überlegungen beweist Zermelo dann seinen **Bestimmtheitssatz**: Die Positionen des Schachs und vergleichbarer Spiele sind allesamt bestimmt, das heißt, sie erfüllen stets eine der drei folgenden Eigenschaften:

- Weiß kann, egal wie Schwarz spielt, einen Sieg erzwingen.
- Schwarz kann, egal wie Weiß spielt, einen Sieg erzwingen.
- Beide Spieler können unabhängig von der Spielweise des jeweils anderen zumindest ein Unentschieden erreichen.

Macht kein Spieler einen Fehler dergestalt, dass er das für ihn eigentlich sicher Erreichbare verfehlt, dann steht das Ergebnis für jede Position fest – die Anfangsposition selbstverständlich eingeschlossen. Und spätestens hier kommen wir an die Grenze zwischen Theorie und Praxis. Die prinzipielle Möglichkeit, sämtliche Positionen in drei Klassen einteilen zu können, besagt noch nichts darüber, wie sie sich konkret vollzieht. Und genau das ist für Schach ein nach wie vor offenes Problem. Wäre es gelöst, wüsste man auch, von welchem Typ die Anfangsposition ist. Schach würde dann, wie Zermelo bemerkte, "freilich den Charakter eines Spiels überhaupt verlieren". Wenn also heute und sicher auch zukünftig Partien zwischen den weltbesten Schachspielern und -programmen nicht immer gleich enden, dann ist das ein Beleg dafür, dass die Komplexität des Schachs so hoch ist, dass sie de facto nicht überwunden werden kann. Zwar lässt die Erfahrung vermuten, dass Schwarz keinen Vorteil

of the Fifth Congress of Mathematics, Vol. II, Cambridge 1913, S. 501-504.

Zermelo, der als Mathematiker vorwiegend auf dem Gebiet der Axiomatisierung mathematischer Grundlagen hervorgetreten ist, hat später auch einen Vorschlag für ein Ranking-System innerhalb von Schachturnieren vorgelegt: Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximierungsproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift, 29 (1929), S. 436-460.

- 1. Das Spiel wird von zwei Personen gespielt.
- 2. Der Gewinn des einen Spielers ist gleich dem Verlust des anderen Spielers.
- 3. Das Spiel endet nach einer begrenzten Zahl von Zügen, und jeder Spieler hat immer nur endlich viele Zugmöglichkeiten.
- 4. Das Spiel weist **perfekte Information** auf, das heißt, alle Informationen über den erreichten Spielstand liegen beiden Spielern offen.
- 5. Es gibt keine zufälligen Einflüsse⁸⁵.

Die zweite Bedingung ist bei der Bewertung der Spielausgänge mit (1, -1), (0, 0) und (-1, 1), wie sie bei Schach und vergleichbaren Spielen üblich ist, gewährleistet. Werden Verluste als negative Gewinne interpretiert, beträgt die Summe der Gewinne stets 0, weshalb man ein solches Spiel **Nullsummenspiel** nennt. Bei einem Nullsummenspiel verfolgen beide Spieler stets vollkommen konträre Interessen. Die dritte Bedingung ist beim Schach dadurch erfüllt, dass eine Partie unentschieden abgebrochen wird, wenn 50 Züge kein Bauer gezogen und keine Figur geschlagen wird. Ein endloses Umherrücken von Figuren ist daher nicht möglich. Für den Bestimmtheitssatz unerheblich ist, dass beide Spieler abwechselnd ziehen; gleichzeitige Züge wie bei Papier-Stein-Schere sind aber entsprechend dem vierten Punkt ausgeschlossen⁸⁶. Erlaubt sind schließlich auch andere als die drei beim Schach auftretenden Spielresultate wie beispielsweise ein doppelter Gewinn (2, -2) für Weiß.

Erfüllt ein Spiel alle fünf Voraussetzungen, gilt der Bestimmtheitssatz. Danach ist das Spiel in dem Sinne strikt determiniert, dass der Ausgang bei beidseitig fehlerfreiem Spiel von vornherein feststeht. Das heißt, zu dem Spiel gehört *ein* Gesamtresultat wie (1, –1), (0, 0) oder (–2, 2), das bei beidseitig fehlerfreiem Spiel immer erreicht wird. Jeder der beiden Spieler kann nämlich so spielen, dass ihm mindestens das entsprechende Ergebnis sicher ist. Und umgekehrt kann das Ergebnis nicht besser ausfallen, sofern auch der Gegner seine Möglichkeiten ausschöpft.

Präziser formulieren lässt sich der Bestimmtheitssatz mit Hilfe des Begriffs der **Strategie**. Eine Strategie stellt eine für einen Spieler vollständige Handlungsanweisung dar, die für jede Situation, wo der betreffende Spieler ziehen muss, einen Zug vorsieht. Dass solche Strategien enorm viel Information beinhalten können und ihre Beschreibung daher entsprechend umfangreich ist, dürfen wir in unseren theoretischen Überlegungen wieder übersehen. Auf diesem Level ist es sogar denkbar, den Ablauf eines beliebigen Zweipersonenspiels so zu ändern, dass beide Spieler ihre Strategie schon vor der Partie vollständig festlegen müssen. Dabei sind verschiedene Varianten denkbar, die sich darin unterscheiden, mit welchem Wissen über die gegnerische Strategie sich ein Spieler entscheiden muss:

- Beide Spieler wählen ihre Strategie insgeheim und offenbaren sie gleichzeitig.
- Weiß muss seine gewählte Strategie offenbaren, bevor sich Schwarz für seine Strategie entscheidet.
- Schwarz muss seine gewählte Strategie offenbaren, bevor sich Weiß für eine Strategie entscheidet.

Auf diese Bedingung kann verzichtet werden, wenn statt der Gewinne deren Erwartungswerte als Basis genommen werden. Dann gilt der Bestimmtheitssatz auch für Spiele wie Backgammon.

⁸⁶ Ziehen beide Spieler wie bei Papier-Stein-Schere gleichzeitig, dann kann man, ohne dass sich das Spiel substantiell ändert, die Züge auch nacheinander organisieren. Dazu wird die Information über den Zug des zuerst ziehenden Spielers seinem Gegner solange vorenthalten, bis auch dieser gezogen hat – offensichtlich liegt damit keine perfekte Information vor.

2.2 Gewinnaussichten und Symmetrie

Um keinen Spieler zu begünstigen, sind die Regeln der meisten Brettspiele für beide Spieler annähernd symmetrisch. Wird das Ziel im konkreten Einzelfall aber tatsächlich erreicht?

Ob Schach, Backgammon, Dame, Halma, Reversi, Go oder Mühle – abgesehen vom Recht des ersten Zuges sind diese Zwei-Personen-Nullsummenspiele für beide Spieler vollkommen

symmetrisch. Stark unsymmetrische Spiele wie Wolf und Schafe⁸⁷ und das 1983 in Deutschland als "Spiel des Jahres" ausgezeichnete Spiel Scotland Yard⁸⁸ sind eher die Ausnahme.

Bei Spielen wie Schach gilt der Anziehende als "leicht" bevorteilt. Allerdings, so lehrt uns der Bestimmtheitssatz, ist ein solches Brettspiel entweder absolut ausgewogen oder einer der beiden Spieler besitzt eine Gewinnstrategie. Für intellektuelle Wettkämpfe kommen eigentlich nur ausgeglichene Spiele in Frage. Sollte ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit perfekter Information nicht ausgeglichen sein, oder ist – was in der Praxis eher die Regel sein dürfte – sein Wert nicht bekannt, kann man versuchen, die Chancen auszugleichen. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Der erste Zug wird ausgelost. Die Spielchancen sind dann gerecht verteilt, aber nur um den Preis, es nun mit einem Glücksspiel zu tun zu haben. Auch wenn der Zufall auf den Spielanfang beschränkt bleibt, so ist sein Einfluss doch sehr erheblich. Bei a priori nicht ausgeglichenen Spielen ist er theoretisch sogar allein entscheidend!
- Man spielt zwei Partien, wobei das Recht des ersten Zuges wechselt. Gegebenenfalls bestehende Vor- und Nachteile bei der ersten Partie werden dann durch die zweite entsprechend kompensiert. Wer das Anzugsrecht in der zuerst gespielten Partie besitzt und wer in der zweiten Partie, ist ohne Belang.
- Beim Brettspiel Twixt⁸⁹ von Alex Randolph soll der Vorteil des Anziehenden dadurch kompensiert werden, dass der Nachziehende nach dem Eröffnungszug entscheiden darf, ob er die Seiten wechseln möchte oder nicht. Die Idee dieser "Kuchenregel" folgt dem Prinzip, nach dem man zwei Kinder gerecht einen Kuchen teilen lassen kann das eine schneidet den Kuchen, das andere darf sich dann das vermeintlich größere Stück aussuchen. Als so genanntes texanisches Roulette wird das Prinzip in abgewandelter Form in der Ökonomie verwendet: Räumen sich zwei gleichberechtigte Teilhaber einer Firma gegenseitig ein Vorkaufsrecht ein, so kann die Preisfindung für einen Anteil dadurch gerecht gestaltet werden, dass der Bietende zugleich bereit sein muss, seinen eigenen Anteil für den gleichen Preis zu verkaufen.

_

Auf einem Schachbrett erhält Weiß vier Damesteine, eben die Schafe, und Schwarz einen Damestein als Wolf. Gezogen werden darf nur diagonal, und zwar ein Feld weit. Dabei dürfen die Schafe nur nach vorne ziehen, der Wolf darf vorwärts und rückwärts ziehen. Ziel der Schafe ist es, den Wolf einzukreisen, so dass er nicht mehr ziehen kann. Das Spiel ist auch unter dem Namen Fuchs und Gänse bekannt; eine Beschreibung findet man in Claus D. Group, *Brettspiele – Denkspiele*, München 1976, S. 90-92. Übrigens besitzen die Schafe eine Gewinnstrategie. Einen Beweis dafür findet man in Elwyn Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Gewinnen*, Band 3, Braunschweig 1986 (engl. Orig. 1982), S. 209-212.

Scotland Yard ist ein sehr schön gestaltetes Verfolgungsspiel, bei dem ein Spieler durch die zusammenspielenden Gegner aufgespürt werden muss. Beim Spielplan handelt es sich um einen Londoner Stadtplan, auf dem im Netz des öffentlichen Nahverkehrs gezogen werden darf; siehe dazu Erwin Glonnegger, *Das Spiele-Buch*, München 1988, S. 124-125; Jury 'Spiel des Jahres', *Spiel des Jahres*, München 1988, S. 56-58; Jury 'Spiel des Jahres', *Die ausgezeichneten Spiele*, Hamburg 1991 (rororo 8912), S. 55-60.

Twixt gehört zu den so genannten Border-to-Border-Spielen, bei denen normalerweise der anziehende Spieler immer zumindest ein Remis erreichen kann. Zwei weitere Spiele dieses Typs, nämlich Hex und Bridge-it, werden in diesem Kapitel an späterer Stelle erörtert. Literatur zu Twixt: David Pritchard (ed.), *Modern board games*, London 1975, S. 92-101 (Autor: David Wells); Andreas Kleinhans, *Twixt – ein kleines Expertenheft*, Stuttgart 1990 (vervielfältigte Broschüre); Erwin Glonnegger, *Das Spiele-Buch*, München 1988, S. 142-143; Werner Fuchs, *Spieleführer 1*, Herford 1980, S. 106-108; Cameron Browne, *Connection Games*, Wellesley 2005, S. 162 ff.

tern nachgewiesen, dass beide Spieler einen Verlust verhindern können, wenn sie nur richtig spielen¹⁰⁵.

Im Sinne einer schon von Allis verwendeten Bezeichnung sind damit Spiele wie Mühle, "Vier gewinnt", Go-Moku und Checkers **schwach gelöst**, das heißt, für die Anfangsposition ist eine optimale Spielweise in dem Sinne bekannt, dass sie mit realistisch verfügbaren Computerressourcen berechnet oder aus einer Datenbank generiert werden kann. Demgegenüber wird ein Spiel wie Hex als **ultra-schwach gelöst** bezeichnet, da für große Spielbretter nur die Existenz einer Gewinnstrategie für Weiß bekannt ist, ohne dass eine solche Gewinnstrategie mit realistisch verfügbaren Computerressourcen berechenbar wäre. Schließlich wird ein Spiel als **gelöst** bezeichnet, wenn für *jede* Position ein optimaler Zug mit realistisch verfügbaren Computerressourcen bestimmt werden kann.

2.3 Ein Spiel zu dritt

Von einem Haufen mit anfänglich zehn (oder mehr) Steinen nehmen drei Spieler reihum Steine. Jeder Spieler darf pro Zug höchstens fünf Steine nehmen. Derjenige Spieler, der den letzten Stein nimmt, gewinnt eine Einheit, und zwar von dem Spieler, der zuvor gezogen hat. Der dritte Spieler geht null auf null aus. Wie verhalten sich die Spieler am besten?

Das beschriebene Spiel wurde erstmals vom Schachweltmeister und Mathematiker Emanuel Lasker¹⁰⁶ (1868-1941) in seinem 1931 erschienenen Buch *Brettspiele der Völker* untersucht. In einem mit *Mathematische Kampfspiele* überschriebenen Kapitel untersucht Lasker zunächst entsprechende Spiele für zwei Personen und versucht dann, seine dabei gewonnenen Ergebnisse zu verallgemeinern. Kann auch bei drei Mitspielern festgestellt werden, welcher der drei Spieler bei fehlerfreiem Spiel die Partie gewinnen wird?

Wie Lasker analysieren wir das Spiel vom Ende her: Bei nur noch einem verbliebenen Stein gewinnt der Ziehende sofort, und zwar mit dem einzig möglichen Zug. Nicht weniger chancenreich sind Haufen mit zwei bis fünf Steinen, die ebenfalls in einem Rutsch abgeräumt werden können – die anderen möglichen Züge sind dagegen kaum attraktiv. Schlechte Aus-

Jonathan Schaeffer, Neil Burch, Yngvi Björnsson, Akihiro Kishimoto, Martin Müller, Robert Lake, Paul Lu, Steve Sutphen, *Checkers is solved*, Science, <u>317</u> (2007), 5844 (14. Sept. 2007), S. 1518-1522; *Dame ist gefallen*, Der Spiegel, 2007/30, S. 122-123.

¹⁰⁶ Als Mathematiker ist Lasker durch einen von ihm 1905 bewiesenen Satz aus der Idealtheorie, einem Zweig der Algebra, bekannt. Laskers Satz lässt sich bei der Untersuchung von Lösungsmengen von Polynom-Gleichungssystemen anwenden (*Zur Theorie der Moduln und Ideale*, Mathematische Annalen, <u>60</u> (1905), S. 20-116). Als relativ leicht verständliche Erörterung dieser Thematik kann eine Vortragsausarbeitung von Bartel L. van der Waerden, *Meine Göttinger Lehrjahre*, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 1997/2, S. 20-27 empfohlen werden; siehe auch: Markus Lang, *Laskers "Ideale" und die Fundierung der modernen Algebra*, in: Michael Dreyer, Ulrich Sieg (Hrsg.), *Emanuel Lasker – Schach, Philosophie, Wissenschaft*, Berlin 2001, S. 93-111.

Als Schachweltmeister amtierte Lasker zwischen 1894 und 1921. Nur schwer nachzuvollziehen ist die Lasker von Georg Klaus in *Emanuel Lasker – ein philosophischer Vorläufer der Spieltheorie*, Deutsche Zeitschrift für Philosophie, <u>13</u> (1965), S. I/976-988 zugedachte Vordenkerrolle bei der Spieltheorie.

Ein Spiel zu dritt 113

sichten hat man als Spieler, wenn man bei einem sechs Steine großen Haufen ziehen muss. Egal, wie viel Steine man dann nimmt, immer kann der nächste Spieler gewinnen und damit einem selbst eine Niederlage beibringen. Bessere Chancen verspricht ein Haufen mit sieben Steinen. Nimmt man nämlich von den sieben nur einen Stein, wird der Nachziehende damit wohl verlieren, was einem selbst letztlich ein Unentschieden beschert. Noch günstiger sind Haufen mit acht, neun, zehn oder elf Steinen, die man am besten auf sieben Steine reduziert, um auf dem schon untersuchten Weg mit dem Unentschieden des Nachziehenden schließlich selbst zu gewinnen.

Haufengröße	Gewinn für den als			
	1.	2.	3.	
	ziehenden Spieler			
0	0	-1	1	
1	1	0	-1	nimm 1
2	1	0	-1	nimm 2
3	1	0	-1	nimm 3
4	1	0	-1	nimm 4
5	1	0	-1	nimm 5
6	-1	1	0	beliebig
7	0	-1	1	nimm 1
8	1	0	-1	nimm 1
9	1	0	-1	nimm 2
10	1	0	-1	nimm 3
11	1	0	-1	nimm 4
12	1	0	-1	nimm 5
13	-1	1	0	beliebig
14	0	-1	1	nimm 1
15	1	0	-1	nimm 1

Tabelle 31 Gleichgewicht des Dreipersonenspiels: Gewinne und Züge

Die so erzielten Ergebnisse sind in Tabelle 31 zusammengefasst. Zu jeder Haufengröße sind die Gewinne aufgeführt, und zwar – in Reihenfolge – für den anziehenden Spieler, für den danach ziehenden Spieler und für den zwei Züge später ziehenden Spieler. Rechts der eigentlichen Tabelle sind die zu empfehlenden Züge aufgelistet. Die sich daraus ergebenden Strategien der Spieler bilden ein so genanntes Gleichgewicht (siehe dazu den Kasten am Ende des Kapitels).

Jede Tabellenzeile ergibt sich aus den darüberliegenden: Der ziehende Spieler entscheidet sich unter den möglichen Zügen für denjenigen, der ihm den größten Gewinn verspricht. Dazu muss er unter den fünf darüberliegenden Zeilen diejenige aussuchen, die in der dritten Gewinnspalte den größten Wert enthält. Denn dieser Wert ist für ihn selbst, der erst nach zwei weiteren Zügen wieder ans Spiel kommt, der maßgebliche. Insgesamt ergibt sich auf diesem Weg eine sich alle sieben Zeilen periodisch wiederholende Tabelle.

So betrachtet, scheint das untersuchte Spiel für drei Personen ähnlich bestimmt zu sein, wie wir es von Zweipersonenspielen wie Schach, Go und so weiter her kennen. Aber ist das wirklich der Fall? Insbesondere ist zu fragen, was passiert, wenn sich ein Spieler nicht so verhält, wie wir es unterstellt haben. Mit anderen Worten: Welche Konsequenzen hat es,

Ein Spiel zu dritt 115

Mit anderen Worten: Die Varianten "einer gegen zwei" werden als Zweipersonenspiele auf der Basis des Minimax-Prinzips untersucht.

Auch diese Tabelle kann rekursiv berechnet werden, wobei wieder jeweils von den fünf vorangegangenen Zeilen auszugehen ist. Für die erste Gewinn-Spalte, die den Gewinn des ziehenden Spielers beinhaltet, müssen die Werte der letzten Gewinn-Spalte maximiert werden. Für die Gewinne der anderen beiden Spieler, die aktuell nicht am Zug sind, muss entsprechend minimiert werden, und zwar sind für die zweite Gewinn-Spalte die fünf vorangegangen Werte der ersten Gewinn-Spalte zu minimieren. Analog ergibt sich die dritte Gewinn-Spalte aus der zweiten. Man erkennt sofort, dass bei Haufen von mindestens 14 Steinen kein Spieler eine Chance hat, wenn sich die beiden anderen einig sind.

Mit den gewonnenen Erkenntnissen wird deutlich, dass Dreipersonenspiele einen ganz anderen Charakter aufweisen können, als wir es von Zwei-Personen-Nullsummenspielen her kennen. Obwohl der Zufall keine Rolle spielt, besitzt das Ergebnis bei drei Mitspielern längst nicht die Stabilität, wie sie bei gültigem Bestimmtheitssatz gegeben ist. Zwar kann kein einzelner der drei Spieler sich einen Vorteil gegenüber dem ursprünglich vorhergesagten Ergebnis verschaffen, Zweien ist es dagegen eventuell möglich – ob durch Kooperation oder zwei Züge, die einzeln betrachtet beide schlecht sind. Als Grundlage eines intellektuellen Wettkampfs kommen solche Spiele daher kaum in Frage. Das erklärt auch, warum es fast keine intellektuell anspruchsvollen Spiele für drei oder mehr Teilnehmer gibt. Zwar werden immer wieder Dreipersonen-Varianten von bekannten Brettspielen wie Schach erdacht, durchsetzen konnte sich aber keine von ihnen¹⁰⁷. Eine Ausnahme bilden Brettspiele für vier Spieler, die in zwei Teams gegeneinander spielen. Da die Mitglieder eines Teams nur zusammen gewinnen oder verlieren können, sind diese Spiele vom Charakter her mehr Zwei- als Vierpersonenspiele.

Undenkbar sind intellektuell anspruchsvolle Mehrpersonen-Nullsummenspiele aber nicht. Voraussetzung ist, dass die Summe der Gewinne, die jeder Spieler allein für sich sichern kann, gleich 0 ist. Dann kann keine Koalition mehr erreichen als seine einzeln agierenden Mitglieder. In der kooperativen Spieltheorie, die sich im Hinblick auf ökonomische Anwendungen mit Koalitionen beschäftigt, nennt man solche Spiele **unwesentlich**. In diesem Sinne unwesentlich und zugleich in den Gewinnaussichten ausgeglichen ist zum Beispiel ein Schachturnier, wo jeder Teilnehmer gegen jeden anderen zwei Partien mit wechselndem Anzugsrecht spielt: Einerseits ist das Turnier-Spiel symmetrisch, so dass kein Spieler einen Gewinn von mehr als 0 sicher haben kann. Andererseits besitzt jede Kombination aus Hinund Rückspiel auf Grund der Symmetrie den Wert 0. Damit ist es jedem einzelnen Spieler auch im gesamten Turnier theoretisch möglich, sich einen Gewinn von mindestens 0 zu sichern. Letztlich liegt das daran, dass in solchen Turnieren Koalitionen wegen der beschränkten Interaktion nur auf der Ebene von Einzelpartien realisierbar sind, wo aber aufgrund des Nullsummen-Charakters keine Verbesserung erreichbar ist 108. Allerdings ist

¹⁰⁷ Siehe dazu in D. B. Pritchard, *The encyclopedia of chess variants*, Surrey 1994 – insbesondere die Einträge zu den Dreipersonen- und Vierpersonen-Schachvarianten (S. 310-313 nebst den dort genannten Querverweisen bzw. S. 113-119); Siegmund Wellisch, *Das Dreierschach*, Wiener Schachzeitung, 15 (1912), S. 322-330. Zu den Dreipersonen-Schachvarianten führt Pritchard aus, dass ihre gemeinsame Schwäche darin bestehe, dass die Defensive bis zum Zeitpunkt des Ausscheidens eines Spielers die beste Strategie sei, während Allianzen, ob explizit oder implizit geschlossen, zum ungleichgewichtigen Beutezug werden.

 $^{^{108}}$ Ein schönes Beispiel, dass nach anderen Modi ausgerichtete Turniere durchaus wesentlich im Sinne

2.4 Nim: Gewinnen kann ganz einfach sein!

Zwei Spieler nehmen abwechselnd Steine von drei Haufen, die zu Beginn 6, 7 und 8 Steine umfassen. Pro Zug dürfen nur von einem Haufen Steine genommen werden, allerdings ist die Zahl beliebig. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Stein nimmt. Wie eröffnet man am besten das Spiel?

Nim, wie das beschriebene Spiel heißt, ist wahrscheinlich das bekannteste Spiel, für das eine vollständige mathematische Theorie existiert. Viele Leser dürften daher die richtige Lösung direkt angeben können: Um sich den Gewinn zu sichern, nimmt man sieben Steine vom größten Haufen.

Hinter der Lösung verbirgt sich eine besondere Formel, die 1902 von Charles Bouton gefunden wurde¹¹¹. Danach besitzt der nachziehende Spieler genau dann eine Gewinnstrategie, wenn die so genannte Nim-Summe der Haufengrößen gleich 0 ist. Dabei wird die Nim-Summe mittels einer übertragslosen "Addition" im binären Zahlensystem berechnet. Ein Beispiel

¹¹⁰ John von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen, <u>100</u> (1928), S. 295-320, nachgedruckt in: Werke: Band IV, S. 1-26. In Kapitel 3.11 werden von Neumanns Ideen über Koalitionen etwas ausführlicher skizziert.

¹¹¹ Charles L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, Annals of Mathematics, Series II., <u>3</u> (1901/02), S. 35-39. Wie Richard Guy in den Mathematical Reviews 1982f: 90101 ausführt, dürfte Nim übrigens nicht viel älter sein als Boutons Untersuchung. Die häufig in Spielebüchern wiederholte Ansicht, Nim sei ein sehr altes Spiel – Das große Krone Spielebuch, Hamburg 1976 erklärt Nim sogar zu dem "wahrscheinlich ältesten Spiel der Welt" – ist durch keine Quelle belegbar.

für eine Position, in der der Nachziehende eine Gewinnstrategie besitzt, ist die durch den gesuchten Gewinnzug entstehende Position aus drei Haufen mit den Größen 6, 7 und 1. Ihre Binärdarstellungen, nämlich 110, 111 und 1, ergeben die Nim-Summe 0. Weitere Einzelheiten zur **Nim-Addition** sind im Kasten zusammengestellt.

Die Nim-Addition

Bekanntlich kann statt im üblichen Dezimalsystem auch im binären Zahlensystem gerechnet werden – insbesondere verfährt intern jeder Computer so. Im binären Zahlensystem wird als Basis die Zahl 2 statt der üblichen Dezimalbasis 10 verwendet, so dass man nur zwei Ziffern braucht, nämlich 0 und 1. Anstelle der Zerlegung nach Zehnerpotenzen, die der dezimalen Zifferndarstellung zugrundeliegt, wie zum Beispiel

$$209 = 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 1$$

tritt im Binärsystem die Zerlegung in Zweierpotenzen, nämlich

$$209 = 1.128 + 1.64 + 0.32 + 1.16 + 0.8 + 0.4 + 0.2 + 1.1$$

Sie entspricht der Binärzahl 11010001. Gerechnet wird mit denselben Techniken wie im Dezimalsystem, wobei aber die Unterschiede im Ziffernvorrat und die dadurch bedingten anderen Überträge zu beachten sind. Nehmen wir zum Beispiel die binäre Addition von 5 und 7, die natürlich wieder 12 ergibt:

$$\begin{array}{r}
101 \\
+ 111 \\
\hline
1100
\end{array}$$

Im speziellen Fall dieses Beispiels entstehen bei den drei hinteren Stellen Überträge von 1. Ignoriert man grundsätzlich alle Überträge, dann stimmt die Summe natürlich nicht mehr. Dafür erhält man aber eine neue mathematische Operation, eben die mit " $+_2$ " abgekürzte Nim-Addition. Bei ihr ist $5 +_2 7 = 2$.

Die Nim-Addition erfüllt die meisten Eigenschaften, die man von der üblichen Addition her kennt. Sie ist sowohl kommutativ, das heißt, es gilt a $+_2$ b = b $+_2$ a , als auch assoziativ – immer ist (a $+_2$ b) $+_2$ c = a $+_2$ (b $+_2$ c). Die Null bleibt auch bei der Nim-Addition das neutrale Element, denn es gilt stets a $+_2$ 0 = 0 $+_2$ a = a. Negative Zahlen braucht man allerdings nicht, da für jede Zahl a $+_2$ a = 0 ist. Im größenmäßigen Vergleich zur normalen Addition stellt sich heraus, dass die Nim-Summe nie die normale Summe übertrifft, stets gilt a $+_2$ b \leq a + b.

Ergänzend wird noch auf die interessante, aber nicht ganz einfache Formel

$$a +_2 b = \min(\mathbb{IN} - \{a' +_2 b \mid 0 \le a' < a\} - \{a +_2 b' \mid 0 \le b' < b\})$$

hingewiesen. Sie bedeutet, dass man eine Nim-Summe von zwei Zahlen auch folgendermaßen berechnen kann: Man bildet alle Nim-Summen, bei denen jeweils einer der beiden Summanden durch jeden kleineren Wert ersetzt wird. Die zu berechnende Nim-Summe ergibt sich dann als die kleinste Zahl, die unter all diesen Nim-Summen *nicht* vorkommt.

berechnet werden. Auch schaltungstechnisch können Nim-Summen einfach realisiert werden. Es wundert daher nicht, dass Nim das erste Spiel ist, das je von einer Maschine gespielt wurde. Bereits 1940 präsentierte die Firma Westinghouse auf der New Yorker Weltausstellung ihr Gerät "Nimatron"¹¹². Das durch seine zahlreichen Relais mehr als eine Tonne schwere Gerät spielte Nim mit bis zu vier Haufen mit jeweils höchstens sieben Steinen. Und selbst noch 1951 beeindruckte ein anderes Gerät namens "Nimrod" die Öffentlichkeit dadurch, dass es den damaligen deutschen Wirtschaftsminister Ludwig Erhard schlug¹¹³.

2.5 Lasker-Nim: Gewinn auf verborgenem Weg

Bei einer Variante des Nim-Spiels entfernt ein Spieler bei seinem Zug entweder Steine von einem Haufen oder er zerlegt einen Haufen mit mindestens zwei Steinen in zwei, nicht unbedingt gleich große Teile. Der Spieler, der den letzten Stein nimmt, gewinnt. Kann man dieses Spiel ähnlich wie Nim auf einfache Weise gewinnen?

Das beschriebene Spiel wurde von Emanuel Lasker erfunden und ist in seinem schon erwähnten Spielebuch¹¹⁴ beschrieben. Seinem Erfinder zu Ehren hat sich inzwischen der Name Lasker-Nim eingebürgert.

Lasker hat das Spiel in seinen Ausführungen auch eingehend untersucht. Dazu versucht er, die Einteilung aller Positionen – Lasker nennt sie "Stellungen" – in Verlust- und Gewinnpositionen vom Nim auf seine, aber auch weitere Varianten des Nim zu übertragen. Eine Position wird dazu aus der Perspektive des Spielers gewertet, der als Nächster zieht. Das heißt, bei einer Position handelt es sich genau dann um eine Gewinnposition, wenn sie dem als nächsten ziehenden Spieler eine Gewinnstrategie bietet. Lasker konkretisiert:

Können wir von einer Stellung, die wir untersuchen, durch einen erlaubten Zug zu einer Verluststellung übergehen, so ist die untersuchte Stellung eine Gewinnstellung; können wir dies nicht, so ist es eine Verluststellung. Ein Drittes gibt es hier nicht ...

Anders als beim Schach ist es also nicht notwendig, die Spieler konkret zu unterscheiden, da ihre Zugmöglichkeiten in einer gegebenen Position stets übereinstimmen.

Laskers Idee zur Spielanalyse besteht darin, aus zwei schon klassifizierten Positionen eine neue zu bilden, indem man deren Haufen einfach nebeneinander legt. Gesucht sind dann Kriterien für den Gewinncharakter der so entstandenen Position. Laskers erste Beobachtung ist:

Zwei Verluststellungen aneinandergefügt, ergeben eine neue. Das läßt sich ohne weiteres ersehen, denn der Nachziehende kann jeden Zug des Anziehenden so beantworten, als

-

¹¹² Siehe dazu E. U. Condon, *The Nimatron*, American Mathematical Monthly <u>49</u> (1942), S. 330-332, US-Patent-Nr. 2 215 544. Eine anders arbeitende Nim-Maschine wird in Raymond Redheffer, *A machine for playing the game Nim*, American Mathematical Monthly, <u>55</u> (1948), S. 343-349 beschrieben.

¹¹³ Digital computers applied to games, in: B. V. Bowden, Faster than thought, London 1953, S. 287, 394 ff

¹¹⁴ Emanuel Lasker, Brettspiele der Völker, Berlin 1931. Die Nim-Variante wird auf S. 183 ff. untersucht; das erste der folgenden Zitate stammt von S. 177 f.

wäre die nichtgespielte Verluststellung gar nicht vorhanden, und muß auf diese Art zuletzt den Tisch leeren, also gewinnen. Beispielsweise, da 1, 1 und 1, 2, 4 Verluststellungen sind, ist auch 1, 1, 1, 2, 4 eine solche.

Direkt anschließend kommt Lasker zum nächsten Fall:

Wiederum, eine Verluststellung an eine Gewinnstellung gefügt, ergibt eine Gewinnstellung, weil ja der Zug, der die ursprüngliche Gewinnstellung in eine Verluststellung verwandelt, auch die erweiterte Stellung in eine Verluststellung verwandelt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass man zu einer beliebigen Position eine Verlustposition hinzufügen kann, ohne dass sich der Gewinncharakter ändert. Übrig bleibt der Fall, bei dem zwei Gewinnpositionen zu einer neuen Position zusammengefügt werden. Anders als in den ersten beiden Fällen kann es dafür keine allgemeine Aussage über den entstehenden Gewinncharakter geben: Beispielsweise ist die aus zwei Gewinnpositionen zusammengesetzte Position 1, 1 eine Verlustposition, hingegen die ebenfalls aus zwei Gewinnpositionen zusammengesetzte Position 1, 2 eine Gewinnposition. Lasker kommt aber zu folgender Erkenntnis:

Zunächst findet sich, daß zwei Gruppen von Haufen "äquivalent" sein können, indem in jeder Verluststellung, wo die eine Gruppe vorkommt, diese durch die andere ersetzt werden kann, ohne daß der Charakter der Stellung aufgehoben würde. Zwei äquivalente Stellungen, zueinander gelegt, erzeugen eine Verluststellung.

Tatsächlich stimmt die Umkehrung ebenfalls: Zwei Positionen sind genau dann zueinander **äquivalent**, wenn sie nebeneinandergelegt eine Verlustposition ergeben^{XXI}. Insbesondere besitzen äquivalente Positionen immer den gleichen Gewinncharakter. Außerdem sind alle Verlustpositionen zueinander äquivalent, während sich die Gesamtheit der Gewinnpositionen in Klassen untereinander äquivalenter Positionen zergliedert. Mit Hilfe seines Konzepts von äquivalenten Positionen gelingt es Lasker, eine Position dadurch zu klassifizieren, dass er sie zu einer äquivalenten Position mit einer besonders einfachen Gestalt vereinfacht. So findet er zu seiner Variante die folgenden, von ihm "prim" genannten "Haufen, die nicht äquivalent Gruppen von kleineren Haufen sind": 1, 2, 3, 7, 15, 31 und so weiter. Bis auf die 2 sind das die um 1 verminderten Zweierpotenzen. Lasker bemerkt:

Jeder beliebige Haufe ist entweder äquivalent einem dieser Haufen oder äquivalent einer Gruppe dieser Haufen. Beispielsweise ist 4 äquivalent 1, 2; 5 äquivalent 1, 3; 6 äquivalent 2, 3; 8 äquivalent 1, 2, 3; ...

Umfangreichere Positionen wie 1, 3, 5, 8 lassen sich auf diese Weise relativ schnell zu 1, 3, 1, 3, 1, 2, 3 und schließlich zu 1, 2, 3 vereinfachen. Da aus dieser Position durch Teilen des letzten Haufens die Verlustposition 1, 2, 1, 2 erreicht werden kann, handelt es sich um eine Gewinnposition. Auch jede andere Position ist äquivalent zu genau einer Auswahl von primen Haufen unterschiedlicher Größe. Um eine Verlustposition, die ja zur leeren Position äquivalent ist, zu erhalten, bestehen dabei nur stark eingeschränkte Möglichkeiten: Würde nämlich aus einer nicht-leeren Auswahl primer Haufen unterschiedlicher Größe eine Verlustposition entstehen, ergäbe sich daraus eine Äquivalenz zwischen diesen Haufen, und der größte Haufen wäre folglich nicht prim. Das heißt, gruppiert man prime Haufen unterschiedlicher Größe zu einer Position, ergibt einzig die leere Gruppierung eine Verlustposition! Allein deshalb kann die oben untersuchte, zu 1, 2, 3 äquivalente Position keine Verlustposition sein. Hat man also erst einmal alle primen Haufen einer Nim-Variante bestimmt, kann dieses Spiel genauso einfach analysiert werden wie das Standard-Nim:

- Jeder Haufen einer Position wird zunächst durch äquivalente prime Haufen ersetzt.
- Eine Verlustposition liegt genau dann vor, wenn danach jeder prime Haufen mit einer geraden Häufigkeit auftritt.

Die beschriebene Methode ist in Laskers Spielebuch explizit nicht ausgeführt. Obwohl man mit ihr durchaus brauchbare Ergebnisse erhält, ist sie im Vergleich zu Boutons Kriterium für das Standard-Nim, dessen prime Haufengrößen die Zweierpotenzen sind, deutlich schwerfälliger. Eine Verbesserung gelang 1935 Roland Sprague (1894-1967) und unabhängig davon 1939 Patrick Michael Grundy¹¹⁵. Ihr Fortschritt gegenüber Lasker besteht vor allem darin, eine Verbindung zwischen verallgemeinertem und dem Standard-Nim gefunden zu haben. Dabei stellt sich heraus, dass die Variationen des Nim mehr das spielerische Erscheinungsbild als die mathematische Substanz betreffen. Innerhalb der zwischenzeitlich erweiterten Theorie bezeichnet man die von Sprague und Grundy untersuchten Spiele heute als neutrale Spiele, bei denen der zuletzt ziehende Spieler gewinnt. Folgende Eigenschaften werden für die Spiele vorausgesetzt:

- Es handelt sich um ein zufallsfreies Zweipersonenspiel mit perfekter Information.
- Die beiden Spieler ziehen beginnend mit einer jeweils festgelegten Anfangsposition immer abwechselnd.
- Die Zugmöglichkeiten in einer Position sind unabhängig davon, welcher Spieler zieht –
 daher die Bezeichnung neutral¹¹⁶. Die von einer Position mit einem Zug erreichbaren
 Positionen werden als deren Nachfolger bezeichnet.
- Der Spieler, der den letzten Zug machen kann, gewinnt.
- Das Spiel ist endlich, das heißt es endet stets nach einer endlichen Zahl von Zügen. Häufig wird auch vorausgesetzt, dass in jeder Position die Zahl der Zugmöglichkeiten endlich ist
- Werden mehrere Positionen G, H, L, ... zu einer Gesamtposition "zusammengelegt", dann geschieht das in Form einer so genannten disjunktiven Summe G + H + L + ...: Ein Spieler zieht in einer solchen Summen-Position dadurch, dass er eine der Komponenten G, H, L, ... auswählt und dort nach der für diese Komponente gültigen Regel zieht.

Disjunktive Summen können durchaus auch von Positionen unterschiedlicher Nim-Varianten gebildet werden. Damit kann Laskers Äquivalenzbegriff auf beliebige Positionen der hier untersuchten Spiele ausgedehnt werden. Das hat auch den Vorteil, dass die Kernaussage der Theorie von Sprague und Grundy besonders einfach formuliert werden kann:

Bei einem neutralen Spiel, bei dem der zuletzt ziehende Spieler gewinnt, ist jede Position äquivalent zu einem Haufen des Standard-Nim.

Die Größe dieses Haufens wird **Grundy-Wert** genannt. Sie stellt ein wesentliches Charakteristikum der zugrundeliegenden Position dar. Der Grundy-Wert hat zwei Eigenschaften, die seine Berechnung in der Praxis entscheidend vereinfachen:

 Der Grundy-Wert einer Position ist gleich der kleinsten natürlichen Zahl, die unter den Grundy-Werten der Nachfolger-Positionen nicht vorkommt^{XXII}.

¹¹⁵ R. Sprague, Über mathematische Kampfspiele, Tôhuko Mathematical Journal, <u>41</u> (1935/6), S. 438-444; P. M. Grundy, Mathematics and games, Eureka, <u>2</u> (1939), 6-8, Nachdruck: Eureka, <u>27</u> (1964), S. 9-11.

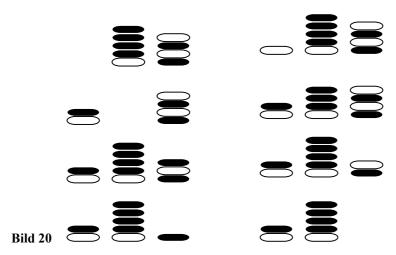
¹¹⁶ Die englische Original-Bezeichung *impartial* wird in der deutschsprachigen Fachliteratur mit *neut-ral* oder *objektiv* übersetzt.

2.6 Schwarz-Weiß-Nim: Jeder zieht mit seinen Steinen

Schwarz-Weiß-Nim wird mit aus weißen und schwarzen Dame-Steinen aufgebauten Türmen gespielt. Pro Zug wählt ein Spieler einen Stein seiner Farbe aus und entfernt ihn zusammen mit den darüberliegenden Steinen. Der Spieler, dem es gelingt, den letzten Zug zu machen, gewinnt. Wie können Gewinnzüge gefunden werden – beispielsweise für die Position aus Bild 19?



Das Schwarz-Weiß-Nim, bei dem es sich um eine vereinfachte Version des von Berlekamp (1940-), Conway (1937-) und Guy untersuchten Spiels Hackenbush handelt¹²³, weist einen wesentlichen Unterschied zu allen bisher untersuchten Nim-Varianten auf: Es ist wie die meisten Brettspiele nicht neutral, das heißt, die Zugmöglichkeiten hängen davon ab, wer – Weiß oder Schwarz – am Zug ist. So sind die Zugmöglichkeiten von Weiß in Bild 20 auf der linken Seite dargestellt. Rechts sind vier der insgesamt sieben für Schwarz in einem Zug erreichbaren Positionen aufgeführt – die anderen drei Züge sind offenkundig höchstens so günstig wie der zweite Zug.



Abgesehen davon, dass die Zugmöglichkeiten in einer Position für beide Spieler unterschiedlich sein können, sind die im letzten Kapitel gestellten Voraussetzungen auch beim Schwarz-Weiß-Nim erfüllt. Für den allgemeinen Teil der Untersuchungen gehen wir daher von folgendem Sachverhalt aus:

- Es handelt sich um ein zufallsfreies Zweipersonenspiel mit perfekter Information.
- Die beiden Spieler ziehen beginnend mit einer jeweils festgelegten Anfangsposition immer abwechselnd.
- Der Spieler, der den letzten Zug machen kann, gewinnt.

¹²³ Die betreffende Literatur ist am Ende des Kapitels zusammengestellt.

- Das Spiel ist endlich, das heißt es endet stets nach einer endlichen Zahl von Zügen. Meist wird auch vorausgesetzt, dass in jeder Position die Zahl der Zugmöglichkeiten endlich ist.
- Werden mehrere Positionen G, H, L, ... zu einer Gesamtposition zusammengelegt, dann geschieht das in Form einer disjunktiven Summe G + H + L+ ...: Ein Spieler zieht in einer solchen Summen-Position dadurch, dass er eine der Komponenten G, H, L, ... auswählt und dort einen für diese Position zulässigen Zug tätigt.

Solche Spiele wurden systematisch in den 1970er Jahren erstmals von John Horton Conway untersucht, der damit die Theorie des Nim auf nicht-neutrale Spiele erweiterte und dabei eine Fülle spielerisch wie mathematisch hoch interessanter Resultate erhielt. Erst nachträglich stellte sich heraus, dass einige Teilaspekte schon 1953 von John Milnor (1931-) und 1959 von Olof Hanner (1922-) gefunden worden waren¹²⁴, deren Ergebnisse aber anscheinend kaum beachtet wurden. Wie beim Nim sind die Positionen der eigentliche Gegenstand der Untersuchungen. Bei nicht-neutralen Spielen hat das zur Folge, dass immer *beide* Spiele zu untersuchen sind, die mit einer gegebenen Position starten – einerseits die Version, bei der Weiß zuerst zieht, und andererseits diejenige mit dem Anzugsrecht für Schwarz. Gefragt wird nach Gewinnstrategien für *beide* Spiele: *Wer* kann *wie* gewinnen?

Wie bei den neutralen Nim-Varianten handelt auch die verallgemeinerte Theorie, die oft auch als **kombinatorische Spieltheorie** bezeichnet wird, im wesentlichen davon, Gewinnstrategien für eine als disjunktive Summe gegebene Position dadurch zu finden, dass man ihre Komponenten eingehend analysiert. Das geschieht wieder in zwei Schritten: Zunächst bietet es sich an, Komponenten disjunktiver Summen durch gleichwertige, aber weniger komplexe Positionen zu ersetzen. Anschließend versucht man, die Gewinnaussichten einer disjunktiven Summe auf eine möglichst einfache Weise zu bestimmen, nach Möglichkeit sogar arithmetisch zu berechnen.

Können bei neutralen Spielen Verlustpositionen aus einer disjunktiven Summe entfernt werden, ohne dass sich dadurch die Gewinnaussichten ändern, so müssen bei nicht-neutralen die Gewinnaussichten beider Spielvarianten – mit dem ersten Zug für Weiß und Schwarz – berücksichtigt werden. Das führt zum Begriff der so genannten **Nullposition**, wie eine Position genannt wird, bei der jeweils der nachziehende Spieler – ob Weiß oder Schwarz – eine Gewinnstrategie besitzt.

Für eine solche Nullposition H gilt: Ein Spieler, der als An- oder Nachziehender eine Gewinnstrategie für eine beliebige Position G besitzt, kann bei unverändertem Anzugsrecht auch das mit der Position G + H startende Spiel sicher für sich entscheiden. Bei beiderseits optimalem Spiel ändert die Addition einer Nullposition das Spielresultat also nicht!

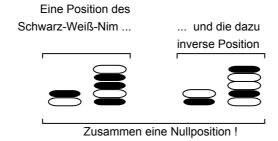
Zur Begründung kann man fast wörtlich auf Laskers Nim-Untersuchungen zurückgreifen: Verfügt ein Spieler als Nachziehender von der Position G aus über eine Gewinnstrategie, so kann er das von der Position G + H startende Spiel dadurch gewinnen, dass er jeden Zug des beginnenden Spielers in der betreffenden Komponente kontert, als wäre die andere gar nicht vorhanden. Besitzt ein Spieler für die Position G hingegen als Anziehender eine Gewinnstrategie, so gewinnt er beginnend von der Position G + H dadurch, dass er zunächst den für die

.

¹²⁴ John Milnor, Sums of positional games, in: Kuhn, Tucker (ed.), Contributions to the Theory of Games II, Reihe: Annals of Mathematics Studies, <u>28</u> (1953), S. 291-301; Olof Hanner, Mean play of sums of positional games, Pacific Journal of Mathematics, <u>9</u> (1959), S. 81-89.

Komponente G vorgesehenen Gewinnzug wählt und so die gerade schon untersuchte Situation erreicht.

Ein triviales Beispiel für eine Nullposition ist die mit "0" bezeichnete Position, bei dem keiner der beiden Spieler mehr einen Zug machen kann. Weitere Beispiele für Nullpositionen erhält man, wenn man die Summe aus einer beliebigen Position G und ihrer so genannten inversen Position –G bildet. Dabei entsteht die **inverse Position** –G, wenn die zwei Spieler in den beiden mit der Position G startenden Spielen ihre Rollen vertauschen. Das heißt, die möglichen Zugfolgen bleiben unverändert, allerdings sind die darin Weiß zugedachten Züge nun von Schwarz zu ziehen und umgekehrt – beim Schwarz-Weiß-Nim werden dazu einfach die weißen und die schwarzen Spielsteine gegeneinander ausgetauscht. Bildet man anschließend die Summe G+(-G), dann ist diese Position aufgrund des möglichen Strategieklaus, bei dem der nachziehende Spieler die Züge des Anziehenden in der jeweils anderen Komponente kopiert, eine Nullposition. Das in Bild 21 dargestellte Beispiel verdeutlicht das Gesagte sofort.



Ein noch interessanteres Beispiel für eine Nullposition bilden die drei Türme

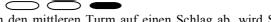
Bild 21



Egal wer in dieser Position zuerst zieht, seine Aussichten sind schlecht: Beginnt Weiß, gibt es für ihn bis auf Symmetrie nur einen Zug, nämlich nach



Kontert nun Schwarz damit, dass er den oberen Stein des linken Turms nimmt, gewinnt er sicher. Beginnt umgekehrt Schwarz, so ist es für ihn noch am günstigsten, zur Position



zu ziehen. Räumt aber Weiß dann den mittleren Turm auf einen Schlag ab, wird Schwarz unweigerlich verlieren.

Nullpositionen, bei denen es sich wie im gerade untersuchten Beispiel um eine Summe von Positionen handelt, können oft dazu verwendet werden, gegebene Positionen zu vereinfachen. Ist nämlich eine Position H+L eine Nullposition, dann sind die Positionen H und L in jeder Summe von Positionen gegeneinander austauschbar, ohne dass sich dadurch die Gewinnaussichten der Spieler ändern: Ist H eine beliebige Position, dann bietet H eleichen Gewinnaussichten wie H und schließlich wie H en Die Positionen H und H werden daher als gleich günstig oder – wie schon bei neutralen Spielen – als **äquivalent** bezeichnet; als Schreibweise wird H = H verwendet.

Wie sich auf diese Weise Positionen vereinfachen lassen, dazu soll nun das Beispiel

2.7 Ein Spiel mit Domino-Steinen: Wie lange ist noch Platz?

Auf einem schachbrettartig eingeteilten Spielfeld legen zwei Spieler abwechselnd Domino-Steine, deren Größe zwei Spielfeldern entspricht. Weiß plaziert seine Steine stets auf zwei bislang unbelegte, senkrecht benachbarte Felder. Schwarz legt seine Steine analog in waagrechter Ausrichtung. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Stein legen kann. Wer kann bei der Position in Bild 24 einen Sieg für sich erzwingen?

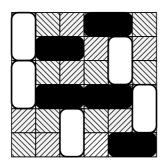
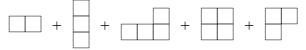


Bild 24

Das beschriebene Spiel geht auf Göran Andersson zurück, der es 1973 Martin Gardner für dessen mathematische Kolumne in *Scientific American* mitteilte¹³¹. Da die neutrale Variante des Spiels, bei dem beide Spieler ihre Steine beliebig ausrichten dürfen, bei Gardner Cram ("voll stopfen") getauft wurde, erhielt Anderssons Spiel zunächst den Namen Crosscram. In den schon erwähnten Untersuchungen von Conway, Berlekamp und Guy¹³² wird das Spiel Domineering genannt, in den deutschen Übersetzungen heißt es Domino beziehungsweise Schachteln.

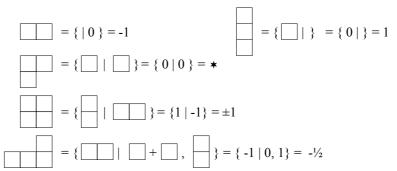
Eine besonders interessante Eigenschaft des Domino ist, dass disjunktive Summen von Positionen im Verlauf einer Partie ganz von selbst entstehen. Damit ist gemeint, dass viele Positionen als Summe einfacherer Positionen gedeutet werden können. Das ist deshalb möglich, weil für die Gewinnaussichten immer nur die zwischen den Steinen klaffenden Lücken entscheidend sind. Zerfällt also diese Gesamtheit von unbelegten Feldern in mehrere, höchstens an Ecken aneinanderstoßende Gebiete, dann ist deren disjunktive Summe gleich der Gesamt-Position – ein Spieler kann nämlich seinen Stein immer nur in *einer* der Lücken platzieren. Bei dem gestellten Problem handelt es sich beispielsweise um die Summe



¹³¹ Scientific American, 1974/2, S. 106 sowie 1976/9, S. 206. Siehe auch Martin Gardner, *Mit dem Fahrstuhl in die 4. Dimension*, Frankfurt/M. 1991 (amerikan. Original. 1986), S. 147 f.

<sup>John H. Conway, Über Zahlen und Spiele, Braunschweig 1983 (engl. Orig. 1976), S. 58 f., 94 ff.;
E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, Gewinnen, Braunschweig 1985 (engl. Orig. 1982), Band 1, S. 117 ff., 137 ff.</sup>

Einige der Komponenten sind uns in äquivalenter Form bereits vom Schwarz-Weiß-Nim her bekannt, von den anderen war zumindest in den Ergänzungen des letzten Kapitels schon die Rede:



Für die zu untersuchende Position ergibt sich damit insgesamt

$$-1 + 1 - \frac{1}{2} + (\pm 1) + * = -\frac{1}{2} + * + (\pm 1)$$

wobei die Komponenten $*=\{0\mid 0\}$ und $\pm 1=\{1\mid -1\}$ einen beim Schwarz-Weiß-Nim gänzlich unbekannten Charakter aufweisen. Ist es nämlich beim Schwarz-Weiß-Nim stets günstiger, seinen Kontrahenten zuerst ziehen zu lassen, ist das Recht des ersten Zuges bei der Position ± 1 sehr lukrativ, was auch starke Auswirkungen auf die zu untersuchende Gesamt-Position hat: Ist Weiß am Zug, kann dieser zur Position $-\frac{1}{2} + * + 1 = \frac{1}{2} + *$ ziehen und damit wegen $* > -\frac{1}{2}$ sicher gewinnen. Zieht dagegen Schwarz zuerst, kann dieser die Position $-\frac{1}{2} + * - 1 = -\frac{1}{2} + *$ erreichen und damit ebenso gewinnen.

"Gerechnet" werden kann sogar mit Positionen, die keine Zahlen sind. So ist beispielsweise $\star + \star = 0$ und $(\pm 1) + (\pm 1) = 0$. Nicht ganz so offensichtlich ist die Gleichung

Die letzte Gleichung beruht darauf, dass die Addition einer Zahl zu einer Position, die selbst keine Zahl ist, die Zugmöglichkeiten der Position um den Wert der Zahl verschieben. Das heißt:

Für jede Zahl x und jede Position $G = \{H, ... \mid P, ... \}$, die selbst keine Zahl ist, gilt die Gleichung

$$\{H, \dots | P, \dots \} + x = \{H + x, \dots | P + x, \dots \}.$$

In Folge können bei einer Summe aus Zahl und Nicht-Zahl die Zugmöglichkeiten der Zahl-Komponente weggelassen werden, ohne dass sich die Gewinnaussichten der beiden Spieler ändern. Beiden Spielern ist es daher immer möglich, einen optimalen Zug innerhalb der Nicht-Zahl-Komponente zu finden – im Beispiel in der linken Komponente $\{1 \mid 0\}$. Je nach Interpretation wird der Satz daher als **Verschiebungsgesetz** oder **Satz vom Zahlen-Vermeiden** bezeichnet. Der Satz beruht darauf, dass ein Zug bei einer Zahl-Position die Gewinnaussichten nie verbessert, in einer Nicht-Zahl-Position dagegen schon XXVII.

Die Temperatur

Die Temperatur ist ein Maß dafür, wie vorteilhaft es für einen Spieler sein kann, bei einer gegebenen Position als Erster ziehen zu dürfen. Ein Ansatz, mit dem dieser Vorteil formal präzise gemessen werden kann, wurde 1959 von Hanner vorgeschlagen¹³⁶. Man reduziert dazu den Anreiz auf das Recht des ersten Zuges, indem man für jeden Zug "Steuern" festsetzt, was in der Form von Transferzahlungen zwischen den Spielern geschieht. Abgewickelt wird die Besteuerung auf der Basis der Stop-Werte, die als Gewinn der beiden mit der betreffenden Position startenden Spiele interpretiert werden. Mit steigender Steuer verändern sich die Stop-Werte und bewegen sich dabei aufeinander zu. Konkret erfolgt die Besteuerung wie folgt:

- Pro Zug zahlt der ziehende Spieler eine Steuer an seinen Gegner.
- Für den ersten Zug ist die Steuerforderung explizit vorgegeben. In den späteren Zügen wird jeweils der Betrag als Steuer gefordert, der im Zug zuvor vom Gegner tatsächlich gezahlt wurde.
- Erscheint dem ziehenden Spieler die Steuer zu hoch, kann er um eine Steuererleichterung nachsuchen: Er bietet dazu die Zahlung eines verringerten Steuerbetrages an, wobei sein Gegner allerdings das Recht erhält, durch Zahlung einer höheren Steuer das Zugrecht zu übernehmen.
- Zum nächsten Zug samt Steuerzahlung aufgefordert wird jeweils der Spieler, der im Zug zuvor nicht gezogen hat.

Die beschriebene Verfahrensweise verhindert, dass ein Spieler bei einem Zug "zusetzen" muss – das Zugrecht wird so nie zum Nachteil. Andererseits kann kein Spieler seine Steuer willkürlich verringern. Für eine Position $G = \{G', ... \mid G'', ...\}$ und einer anfänglichen Steuerfestsetzung in Höhe von $t \ge 0$ erhält man dadurch die "abgekühlten", das heißt besteuerten, Stop-Werte von

$$L_t(G) = \max(R_t(G') - t, ...)$$
 und $R_t(G) = \min(L_t(G'') + t, ...)$.

Auszunehmen sind allerdings die Fälle, bei denen sich bereits für einen kleineren Wert u mit $0 \le u < t$ eine Angleichung der abgekühlten Stop-Werte, also $L_u(G) = R_u(G)$, ergibt. Aufgrund der zu hohen Steuer lohnt es sich dann nicht mehr, den ersten Zug zu machen, und es kommt daher zur Festlegung $L_t(G) = R_t(G) = L_u(G) = R_u(G)$. Die Temperatur t(G) ist per Definition die anfängliche Steuerforderung, ab der die mittels Steuern abgekühlten Stop-Werte übereinstimmen und sich nicht mehr weiter verändern, sondern auf einem festen Wert, eben dem Mittelwert m(G), verharren.

Den besten und schnellsten Eindruck über die Gesamtheit aller abgekühlten Stop-Werte $L_t(G)$ und $R_t(G)$ erhält man durch eine graphische Darstellung innerhalb eines Koordinatensystems. Die folgende Abbildung zeigt für das Beispiel der Position $G = \{\{3 \mid 2\} \mid 1\}$, wie deren so genannter **Thermograph** aus den ebenfalls dargestellten Thermographen der beiden Zugmöglichkeiten, nämlich nach $\{3 \mid 2\}$ und 1, entsteht:

¹³⁶ Siehe Fußnote 124.

2.8 Go: Klassisches Spiel mit moderner Theorie

Welches sind die besten Züge für Weiß beziehungsweise Schwarz, wenn diese in der Go-Position von Bild 27 am Zuge sind? Wie viele Gewinnpunkte können jeweils erzielt werden?

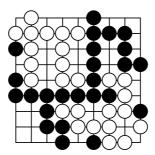


Bild 27

Go ist eines der ältesten Spiele überhaupt. Nach gesicherten Quellen wurde es bereits 300 v.Chr. in China gespielt, wahrscheinlich sind die Ursprünge aber sogar ein- oder gar zweitausend Jahre älter. Schon vor 1500 Jahren verbreitete sich die Leidenschaft des Go-Spiels in andere asiatische Länder wie Korea und vor allem Japan¹³⁷. Nach Europa gelangte das Go

¹³⁷ Über die Geschichte des Go sowie das eigentliche Spiel informieren: Siegmar Steffens, Go spielend lernen, Berlin 1990; Michael Koulen, Go – die Mitte des Himmels, Köln 1986; Jörg Digulla, Alfred Ebert, Horst Timm, Go: Anfängerbuch, Kassel 1994; Gilbert Obermair, Klassische Spiele aus dem Fernen Osten, München 1986, S. 35-56; Frederic V. Grunfeld (dt. Bearb. Eugen Oker), Spiele der Welt, Frankfurt 1984 (engl. Orig. 1975), Bd. II, S. 24-38; Erwin Glonnegger, Das Spiele-Buch, München 1988, S. 132-139; Erhard Gorys, Das groβe Buch der Spiele, Hanau ca. 1987, S. 218-225; Richard Bozulich, The Go player's almanac, Tokio 1992.

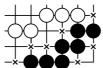
erst relativ spät, nämlich zum Ende des 19. Jahrhunderts. Als einer der größten Förderer des Go trat dabei übrigens Emanuel Lasker hervor, in dessen 1931 erschienenem, hier schon zitierten Buch *Brettspiele der Völker* dem Go immerhin achtzig Seiten gewidmet sind. Lasker bemerkt über das Go¹³⁸:

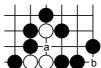
Es hat eine durchgehendere Logik als das Schach, ist ihm an Einfachheit überlegen und steht ihm, glaube ich, an Schwung der Phantasie nicht nach.

Go: Die Regeln

Im Vergleich zu Schach, das eindeutig ein Kampfgeschehen simuliert, ist das Spielgeschehen des Go deutlich abstrakter. Gespielt wird standardmäßig auf einem quadratischen Spielbrett im Format 19×19, auf das beide Spieler abwechselnd jeweils einen Stein der eigenen Farbe setzen. Positioniert werden die untereinander gleichförmigen Steine jeweils auf noch unbesetzte Schnittpunkte der senkrechten und waagrechten Linien. Spielziel ist es, möglichst große Bereiche des Spielfeldes durch Steine der eigenen Farbe zu umschließen, wobei eingeschlossene Steine des Gegners geschlagen werden. Abgesehen vom Schlagen werden einmal gesetzte Steine bis zum Spielende nicht mehr bewegt.

Steine einer Farbe, die senkrecht oder waagrecht – unmittelbar oder mittelbar – benachbart sind, bilden so genannte Ketten; so bilden im linken Diagramm die weißen Steine zwei Ketten und die schwarzen eine. Als Freiheit einer Kette bezeichnet man einen noch unbesetzten Schnittpunkt, der zu einem Stein der Kette senkrecht oder waagrecht benachbart ist; im linken Diagramm sind die Freiheiten der schwarzen Kette mit × markiert. Ein Schnittpunkt kann auch die Freiheit von mehreren Ketten sein.





Wird durch das Setzen eines Steines die letzte Freiheit von einer oder mehreren Ketten der gegnerischen Farbe besetzt, so werden alle Steine der betreffenden Ketten geschlagen. Setzt Schwarz zum Beispiel im rechten Diagramm auf den Schnittpunkt a, werden die drei eingeschlossenen weißen Steine geschlagen. Gemäß der so genannten Selbstmordregel darf ein Stein nie so gesetzt werden, dass er einer eigenen Kette die letzte Freiheit nimmt, es sei denn, mindestens ein gegnerischer Stein wird durch den Zug geschlagen. So darf Weiß nicht in die Ecke b setzen. Ab und zu werden die Zugmöglichkeiten noch in einer anderen Weise durch die so genannte Ko-Regel eingeschränkt: Danach darf ein Zug nicht die Situation wiederherstellen, von der aus der Gegner zuletzt gezogen hat – Zugwiederholungen durch das Schlagen und Zurückschlagen von jeweils einem Stein werden damit unterbunden.

Beim Go besteht kein Zwang zum Ziehen. Will keiner der beiden Spieler mehr ziehen, endet die Partie, und es wird abgerechnet: Zunächst werden die Steine, bei denen ein Schlagen nicht verhindert werden könnte, "gefangen" genommen und vom Brett entfernt. Wie auch die schon zuvor geschlagenen Steine zählen sie je einen Punkt für den

¹³⁸ S. 89 bis 169, das Zitat stammt von S. 89.

Gegner. Der Hauptanteil der Punkte resultiert aus den kontrollierten Gebieten, wobei jeder unbesetzte Schnittpunkt, der von eigenen Steinen "umschlossen" ist, einen Punkt zählt. Dabei zählt ein Schnittpunkt für einen Spieler als umschlossen, wenn jeder nach außen über senkrechte und waagrechte Linien verlaufende Weg durch eigene Steine unterbrochen ist. Der Spieler mit der insgesamt höchsten Punktzahl gewinnt. Wie sich diese Regeln praktisch auswirken, wird an den einfachen Beispielen des Haupttextes schnell deutlich.

Da beim Go die Punktwertung spielentscheidend ist und nicht die Tatsache, wer den letzten Zug gemacht hat, liegt offensichtlich kein Spiel im Sinne Conways vor. Andererseits können Teile des Spielfeldes bereits viele Züge vor dem Spielende völlig stabil werden, so dass sich die noch umkämpften Zwischenräume völlig unabhängig voneinander entwickeln. Weil dann jeweils in genau einem Zwischenraum gezogen wird, handelt es sich wie beim bereits untersuchten Domino um eine disjunktive Summe der den Zwischenräumen entsprechenden Teilpositionen. Untersucht wurden Summen von Positionsspielen mit Punktwertung erstmals 1953 in der schon erwähnten Arbeit von Milnor¹³⁹. Er und später Hanner¹⁴⁰ analysierten, welche Gewinne sich die beiden Spieler in einer Summe von solchen Positionsspielen insgesamt sichern können (siehe den Kasten *Go als Punktwertungsspiel*). Obwohl es in den Arbeiten keine direkten Bezüge auf das Go gibt, ist es doch gesichert, dass die Anwendung auf Go die Entstehung beider Arbeiten maßgeblich motiviert hat¹⁴¹.

Dass man Spiele, in denen der zuletzt ziehende Spieler gewinnt, mit Hilfe der Stop-Werte in Gewinnhöhen eines Nullsummenspiels "übersetzen" kann, haben wir im letzten Kapitel gesehen. Aber auch das Umgekehrte ist möglich, wie es im Kasten am relativ einfachen Spiel

¹³⁹ In Kapitel 2.6, Fußnote 124.

¹⁴⁰ Siehe Kapitel 2.6, Fußnote 124 und Seite 145.

¹⁴¹ So verwendet Milnor auf S. 298 den Go-Begriff Sente zur Beschreibung der Situation, bei der ein Zug in derselben Komponente gekontert werden muss. In der Einführung zu den zusammen mit Milnors Arbeit erschienenen Artikeln bemerken die Herausgeber Kuhn und Tucker, dass besonders Go-Endspiele oft den Charakter einer Summe von Einzelspielen annehmen, wie sie von Milnor untersucht werden (S. 191). Milnor, der später durch seine Forschungen auf dem Gebiet der Topologie sehr bekannt wurde und 1962 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde, war damals noch Student in Princeton. Wie er an anderer Stelle schreibt, gehörte Go zu den Spielen, die er oft spielte (A nobel price for John Nash, The Mathematical Intelligencer, 17/3 (1995), S. 11-17); zur mathematischen Interpretation des Begriffs Sente siehe auch E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, Gewinnen, Braunschweig 1985 (engl. Orig. 1982), Band 1, S. 157.

In Hanners Arbeit ist kein direkter Hinweis auf das Go zu finden. Auf Anfrage erläuterte Olof Hanner jedoch freundlicherweise die Entstehungsgeschichte seiner Arbeit: Mit Go war Hanner erstmals bei seinem Aufenthalt 1949/50 in den USA in Berührung gekommen. Aber erst 1956 vertiefte er seine Erfahrung mit Takagawas Buch *How to play Go*. Dabei reifte bei Hanner die Idee, Endpositionen des Go einen eindeutigen Wert zuzuordnen. Dazu legte Hanner die betreffende Position mehrfach nebeneinander – Milnors Arbeit kannte er zu diesem Zeitpunkt übrigens noch nicht. Wenn solche mehrfachen Positionen abgespielt werden, sind beim Ziehen öfters Wechsel zwischen den verschiedenen Teilpositionen empfehlenswert. Wie aber lassen sich solche Sente-Gote-Fragen beantworten? Hanner ordnete dazu den Zügen versuchsweise Werte zu und überprüfte, bei welchen Werten es dabei zu Widersprüchen kam. Auf diesem Weg gelangte er schließlich zu seiner formalen Definition, bei dem das Zugrecht "versteigert" wird.

Eine explizite Anwendung von Milnors Ergebnissen auf Go findet man bei John Miller, *The end game of Go*, Proceedings of Northwest 76, ACM/CIPS Pacific regional symposium, Seattle 1976, S. 228-233.

entfernter Weise mit einer technischen Zeichnung vergleichbar, die bei einer günstig gewählten Perspektive wesentliche Eigenschaften des abgebildeten Objekts verdeutlicht, weniger wichtige aber ausblendet. Beim Abkühlen erhalten bleiben insbesondere Mittelwerte und untereinander bestehende Beziehungen auf der Basis einer Größer-oder-Gleich-Relation oder einer disjunktiven Summe. Warum beim Go eine Abkühlung gerade um den Wert 1 nahe liegend ist, das wird im Kasten *Go als Punktwertungsspiel* erörtert.

Go als Punktwertungsspiel

Disjunktive Summen, Größer-oder-Gleich-Beziehungen und Kühlungen lassen sich für Go-Positionen auch direkt untersuchen, ohne dass dazu eine Transformation ins mathematische Go vorgenommen wird, womit zugleich die für die Definition der Stop-Werte implizit notwendige Rückübertragung in ein Spiel mit Punktwertung entfällt. Dieser direkte Weg entspricht dem Ansatz, den Milnor und Hanner in den 1950er Jahren beschritten.

Zu jeder Go-Position G gehören – abhängig vom Anzugsrecht – zwei Minimax-Werte $L_0(G)$ und $R_0(G)$, von denen jeder den Gewinn widerspiegelt, den Links bei beidseitig optimalem Spiel erzielt. Da man beim Go auf seinen Zug verzichten darf, kann Links als Anziehender mindestens einen so hohen Punktgewinn erzielen wie als Nachziehender, das heißt, es gilt stets die Ungleichung $L_0(G) \ge R_0(G)$.

Für die disjunktive Summe G + H von zwei Teilpositionen G und H gelten Milnors Ungleichungen:

$$L_0(G) + L_0(H) \ge L_0(G+H) \ge \frac{R_0(G) + L_0(H)}{L_0(G) + R_0(H)} \ge R_0(G+H) \ge R_0(G) + R_0(H)$$

Jede einzelne dieser Ungleichungen erklärt sich aus strategischen Überlegungen, wie sie schon Lasker zur Untersuchung von Nim-Varianten verwendete (siehe Kapitel 2.5). Dazu kontert ein Spieler jeweils den Zug seines Gegners in derselben Komponente, in der dieser gerade gezogen hat, und zwar mit einem Zug, der in der betreffenden Komponente für sich allein betrachtet optimal ist.

Insbesondere erlauben es Milnors Ungleichungen, den Einfluss einzelner Teilpositionen auf die Gewinnaussichten einer Gesamtposition abzuschätzen. Dazu sehen wir uns an, wie sich die Gewinnaussichten einer Position G ändern, wenn sie um eine Teilposition G zur Gesamtposition G + G ergänzt wird: Wegen

$$L_0(G) + L_0(H) \ge L_0(G+H) \ge L_0(G) + R_0(H)$$

 $R_0(G) + L_0(H) \ge R_0(G+H) \ge R_0(G) + R_0(H)$

sind die Änderungen, die beide Minimax-Werte dabei erfahren, durch die Minimax-Werte der hinzugekommenen Positionen H begrenzt 147 . Für Links ist daher die Position G+H im Vergleich zur Position G

$$\rho'(G, H) = \max_{X} |L_0(G + X) - L_0(H + X)| = \max_{X} |R_0(G + X) - R_0(H + X)|,$$

¹⁴⁷ Auf dieser Basis definiert J. Mark Ettinger (*A metric for positional games*, Theoretical Computer Science, 230 (2000), S. 207-219) für zwei beliebige solche Punktwertungspositionen vom "Milnor-Typ" G und H (das heißt mit $L_0(J) \ge R_0(J)$ für alle nachfolgenden Positionen J) einen "Abstand", mathematisch als so genannte Metrik bezeichnet. Dies geschieht, indem für beliebige Positionen vom Milnor-Typ X das Maximum

- Der Links-Stop, also der Minimax-Wert für Weiß als zuerst Ziehenden, ist gleich der kleinsten ganzen Zahl, die größer oder gleich der disjunktiven Summe ist.
- Der Rechts-Stop, also der Minimax-Wert für Weiß als Nachziehenden, ist gleich der größten ganzen Zahl, die kleiner oder gleich der disjunktiven Summe ist.

Als Beispiel sehen wir uns die eingangs abgebildete Position an. Neben den sicheren Punkten, nämlich 3 für Weiß und 5 + 7 = 12 für Schwarz, ergibt sich die in Bild 28 dargestellte Zerlegung in eine disjunktive Summe. Mit angegeben sind jeweils die um 1 gekühlten Conway-Positionen, wie wir sie in den bisherigen Beispielen bereits kennen gelernt haben.

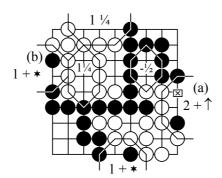


Bild 28

Kühlt man die abgebildete Position um 1 ab, ergibt sich insgesamt die Position

$$-3 + \uparrow$$

deren größenmäßige Einordnung im Vergleich zu den ganzen Zahlen durch

$$-3 < -3 + \uparrow < -2$$

gegeben ist. Damit beträgt der Minimax-Wert für Weiß –2 Punkte, wenn Weiß beginnt, und -3 Punkte, wenn Schwarz zuerst zieht. Züge, mit denen diese Minimax-Werte realisiert werden können, sind analog erkennbar:

- Ist Weiß am Zug, setzt er auf das in Bild 28 mit ⊠ markierte Feld und erreicht dadurch in dieser Komponente die Position 3. Im kalten Go wird damit insgesamt die Position -2 erreicht, was zugleich der Minimax-Wert des nun nachziehenden Spielers Weiß ist.
- Beginnt Schwarz, setzt er ebenso auf das markierte Feld, womit er im kalten Go in der betreffenden Komponente 1 + * und insgesamt -4 + * erreicht, was ihm letztlich einen Gewinn von mindestens 3 Punkten sichert – als Anziehender verfügt Weiß nämlich über einen Minimax-Wert von -3, der kleinsten ganzen Zahl, die größer oder gleich -4 + * ist.

Schlecht für Weiß ist übrigens der Zug in einer der beiden zu 1 + * abkühlenden Komponenten: Ein Zug dort brächte bei der gekühlten Version in dieser Komponente die Position 2 und damit insgesamt $-2 + * + \uparrow$. Die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich dieser Position ist, ist -3 - damit der Minimax-Wert für den nachziehenden Spieler Weiß. Mit einem Zug in der mit (b) markierten Komponente verschenkt Weiß also einen Punkt.

Ist aber, wie in Bild 29 zu sehen, eine der beiden ★-Komponenten nicht mehr vorhanden, ändert sich die Situation grundlegend. Obwohl die Position bis auf die zwei mit û markierten Schnittpunkte mit der untersuchten übereinstimmt, ergibt sich eine gänzlich andere Situation, und zwar in Fernwirkung selbst auf die verbliebenen Komponenten (a) und (b): Mit einem Zug in der vormals optimalen Komponente (a) kann Weiß im kalten Go ausgehend

Environmental Go: Eine erweiterte Temperaturtheorie

Im vorangegangenen Kapitel wurde die Kühlung von Positionen eines Conway-Spiels dadurch definiert, dass Züge "besteuert" wurden. Dieser Ansatz hat allerdings beim Go zwei Nachteile: Einerseits ist eine Verallgemeinerung auf Positionen, bei denen das nachfolgende Spiel Ko-Situationen durchlaufen kann, im Wesentlichen nur dadurch möglich, dass jeweils einem vorher fest ausgewählten Spieler Züge mit Positionswiederholung untersagt werden. Und andererseits hat sich herausgestellt, dass an der kombinatorischen Spieltheorie interessierte Go-Spieler den Ansatz einer Besteuerung meistens wenig suggestiv finden – nicht nur, weil niemand gerne Steuern zahlt.

Aus den beiden genannten Gründen ersann Elwyn Berlekamp eine alternative Konstruktion zur Kühlung von Positionen 152 . Er betrachtete dazu eine temperaturmäßig zu analysierende Position als lokal abgegrenzten Bestandteil innerhalb von umfangreicheren, quasi "umgebenden" Positionen. Konkret werden Summen der gegebenen Position mit jeweils mehreren, standardisierten Positionen untersucht. Dabei reicht es aus, für solche Summen ausschließlich sogenannte **Schaltspiele** zu verwenden, das sind Spiele der Form $\{t \mid -t\}$. Mit solchermaßen gebildeten Summen ist es nämlich möglich, den Vorteil des Zugrechts im weiteren Verlauf des Spiels geschickt aufzuwiegen. In diesem Zusammenhang ist daran zu erinnern, dass ein Aufwiegen von Gewinnaussichten – allerdings in anderer Form – in Bezug auf das Recht des allerersten Zuges (sowie zum Ausgleich unterschiedlicher Spielstärken von Spielern) durch das im Go übliche, Komi genannte Vorgabesystem zur Tradition des Go-Spiels gehört.

Um seine **Environmental Go** genannte Konstruktion, dessen genaue Definition wir noch zurückstellen, praktisch spielbar zu machen, "verpackte" Berlekamp seine Idee in eine spielerisch ansprechende Form: Außer dem Go-Brett, auf dem die Spielsteine nach den üblichen Regeln gesetzt werden, wird zum Spiel ein sortierter Kartenstapel mit den

.

¹⁵² Elwyn Berlekamp, *The economist's view of combinatorial games*, in: Richard J. Nowakowski (ed.), *Games of no chance*, Cambridge 1996, S. 365-405, insbesondere S. 394 ff.

Werten 10, 20, 19½, 19, 18½, 18, ..., 1½, 1, ½ verwendet. Dabei darf ein Spieler bei seinem Zug entweder auf dem Brett ziehen oder die oberste Karte vom Stapel nehmen und sich so eine entsprechend hohe Zusatzpunktzahl sichern. Zur Kompensation des Rechtes, den allerersten Zug machen zu dürfen, erhält der nachziehende Spieler – beim Go ist dies abweichend von der hier gewählten Praxis traditionell Weiß – vor dem eigentlichen Spielbeginn die oberste Karte mit dem Wert 10.

Um nun einen ungefähren Eindruck davon zu erhalten, wie sich die Temperatur im Verlauf einer Go-Partie entwickelt, organisierte Berlekamp einige Partien seines Environmental Go mit profesionellen Go-Spielern. Die erste solche Partie wurde 1998 von Rui Naiwei und Jiang Zhujiu gespielt, beides Spieler vom höchsten Grad 9-Dan-Pro (und inzwischen miteinander verheiratet). Die Partie endete äußerst knapp, nämlich je nach (länderspezifischer) Regelversion mit einem Vorsprung von 2½ für Weiß beziehungsweise ½ für Schwarz. Damit kann aus dem aufgenommenen Spielprotokoll zu den Zeitpunkten, in denen Karten genommen wurden, auf die jeweils aktuelle Temperatur geschlossen werden – zumindest dann, wenn nicht beide Go-Profis der gleichen Fehleinschätzung über den Wert des aktuellen Zuges unterlegen sind.

Vor dem ersten Zug wurden die Kartenwerte bis einschließlich 14 genommen, bei einer späteren Partie bis 15. Diese Spielweisen lassen vermuten, dass die Temperatur des leeren Spielbrettes als Anfangsposition von den Beteiligten mit 14 oder knapp darüber eingeschätzt wurde. Bereits nach 17 Zügen waren die Kartenwerte bis 10½ abgeräumt. Anschließend wurden über 200 Züge ausschließlich auf dem Spielbrett getätigt.

Für eine theoretische Untersuchung der Kühlung einer Position ist es zweifelsohne nahe liegend, das Temperatur-Raster der "umgebenden" Schaltspiele zu verfeinern. Zur Analyse einer Kühlung um den Wert t wird daher eine Summe von Schaltspielen der Form

$$E_t = \{t | -t\} + \{t - \delta| - t + \delta\} + \{t - 2\delta| - t + 2\delta\} + \dots$$

verwendet. Dabei erstreckt sich die Summe über alle Schaltspiele der angeführten Form mit positiver Temperatur. Der Rasterabstand $\delta > 0$ wird genügend fein gewählt.

Wird das als Umgebung dienende Spiel E_t für sich allein gespielt, ist es für den ziehenden Spieler vorteilhaft, für seinen Zug unter den verbliebenen Schaltspielen jeweils dasjenige Schaltspiel mit der höchsten Temperatur auszuwählen. Da somit der anziehende Spieler in jedem seiner Züge einen um δ höheren Betrag bekommt als sein Gegner im darauf folgenden Zug, ergeben sich, sieht man einmal von einer bei einer ungeraden Anzahl von Summanden entstehenden, kleinen Ungenauigkeit von höchstens δ ab, die beiden Minimax-Werte $L_0(E_t) = t/2$ und $R_0(E_t) = -t/2$.

Die gekühlten Minimax-Werte $L_t(G)$ und $R_t(G)$ einer Position G lassen sich nun, wie Berlekamp nachwies 153,XXXVI , auch folgendermaßen approximieren, wobei der Fehler bei einem klein genug gewählten Rasterabstand δ beliebig klein wird:

$$L_t(G) = L_0(G + E_t) - L_0(E_t)$$
 und $R_t(G) = R_0(G + E_t) - R_0(E_t)$.

¹⁵³ Elwyn Berlekamp, Sums of N×2 Amazons, in: Game theory, optimal stopping probability statistics, Papers in honor of Thomas S. Ferguson, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes Monograph Series, 35, Beechwood 2000, S. 1-34, insbesondere S. 31 ff. Einen einfacheren Beweis findet man in der Anmerkung XXXVI.

2.9 Misère-Spiele: Verlieren will gelernt sein!

Die Regeln von Conway-Spielen lassen sich dahingehend ändern, dass der Spieler, der den letzten Zug macht, nicht gewinnt, sondern verliert. Können für solche umgekehrte Versionen ebenso einfache Kriterien für Gewinnzüge gefunden werden wie das mit Hilfe der Grundy-Zahlen für die normalen Versionen der Fall ist?

Bereits in der ersten Untersuchung des Nim-Spiels analysierte Charles Bouton 1902 auch die umgekehrte Version des Standard-Nim¹⁵⁶. Bei einem umgekehrten, meist **Misère**-Version genannten Nim-Spiel versucht ein Spieler so zu ziehen, dass er nach den normalen Regeln verlieren würde. Dazu muss er seinen Gegner zwingen, zu einer Endposition zu ziehen.

Boutons Ergebnis für das umgekehrte Standard-Nim ist bemerkenswert einfach: Der auf Gewinn stehende Spieler zieht wie bei der normalen Version zu einer Position mit Nim-Summe 0, außer wenn durch den Zug eine Position entstehen würde, bei der alle verbliebenen Haufen aus einem einzelnen Stein bestehen. In diesem Ausnahmefall zieht er stattdessen zu einer Position, die aus einer ungeraden Zahl von Einser-Haufen besteht. Anschließend verläuft der Rest der Partie unter beidseitigem Zugzwang – bis zum Gewinn des Spielers, der die Gewinnstrategie verwendet.

Im Hinblick auf andere Nim-Varianten, die wir im Anschluss untersuchen wollen, lässt sich Boutons Ergebnis auch anders ausdrücken. Dazu definiert man zunächst den Begriff der **Ausnahmeposition**: Bei den Ausnahmepositionen handelt es sich um alle Positionen, die den Spielern innerhalb der beiden Versionen unterschiedliche Gewinnaussichten bieten. Beim Standard-Nim sind das die bereits angeführten Positionen, deren verbliebene Haufen aus genau einem Stein bestehen. Alle anderen Positionen bieten in beiden Versionen des Standard-Nim die gleichen Gewinnaussichten. Bei den Ausnahmepositionen ist es zweckmäßig, sie danach zu unterscheiden, welche Gewinnaussichten sie bei der normalen Version bieten. Dann erhält man einerseits die Positionen der Form 1^{2k}, das heißt

- 0,
- 1, 1,

¹⁵⁶ Charles L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, Annals of Mathematics, Series II., 3 (1901/02), S. 35-39.

• 1, 1, 1, 1 und so weiter,

und andererseits die Positionen der Gestalt 1^{2k+1}, nämlich

- 1
- 1, 1, 1 und so weiter.

Auf Basis dieser Untergliederung handelt es sich bei den Verlustpositionen des umgekehrten Standard-Nim um die Positionen mit der Nim-Summe 0, ausgenommen die Ausnahmepositionen 1^{2k}, dafür aber erweitert um die Ausnahmepositionen 1^{2k+1}. Entsprechend umfassen die Gewinnpositionen des umgekehrten Standard-Nim die Positionen mit positiver Nim-Summe, ausgenommen die Ausnahmepositionen 1^{2k+1}, dafür aber erweitert um die Ausnahmepositionen 1^{2k}.

Die beim Standard-Nim gefundene Einteilung der Positionen existiert im Prinzip natürlich ebenso für jede andere Nim-Variante. Auch dort ergibt sich, wenn man die Gewinnaussichten der normalen und der Misère-Version parallel zugrundelegt, eine Einteilung der Positionen in vier Klassen. Verwendet man die Bezeichnungen G für Gewinnpositionen und V für Verlustpositionen¹⁵⁷, kann jede dieser vier Positionsklassen durch zwei Buchstaben gekennzeichnet werden, wobei der erste Buchstabe jeweils für die normale und der zweite für die Misère-Version steht:

- GG: Eine GG-Position ist in beiden Versionen eine Gewinnposition.
- VV: Eine VV-Position ist in beiden Versionen eine Verlustposition.
- GV: Eine GV-Position ist in der normalen Version eine Gewinnposition, andererseits aber eine Misère-Verlustposition.
- VG: Eine VG-Position ist in der normalen Version eine Verlustposition, andererseits aber eine Misère-Gewinnposition.

Die Ausnahmepositionen, also die Positionen, die in beiden Versionen unterschiedliche Gewinnaussichten bieten, setzen sich aus den GV- und den VG-Positionen zusammen. Im Fall des Standard-Nim handelt es sich bei den GV-Positionen um alle Positionen der Gestalt 1^{2k+1}, hingegen umfassen die VG-Positionen alle Positionen der Form 1^{2k}. Generell, das heißt in einer beliebigen Nim-Variante, gibt es zu jeder Ausnahmeposition einen Zug, der zu einer anderen Ausnahmeposition führt. Gibt es nämlich bei einer gegebenen Position keine solche Zugmöglichkeit, übertragen sich die zwischen normaler und Misère-Version übereinstimmenden Gewinnaussichten von den Folgepositionen auf die gegebene Position selbst.

Um eine einzelne Version einer Nim-Variante vollständig zu analysieren, muss die Zerlegung aller Positionen in Gewinn- und Verlustpositionen gefunden werden. Im Fall der normalen Versionen ist dies bekanntlich immer mit Hilfe der Grundy-Werte möglich. Allgemein müssen, falls eine vermutete Zerlegung in Gewinn- und Verlustpositionen bestätigt werden soll, die folgenden Eigenschaften erfüllt sein. Sie entsprechen dem Minimax-Prinzip im Sinne des Zermelo'schen Bestimmtheitssatzes und wurden so schon in Kapitel 2.4 für die normale Version des Standard-Nim nachgewiesen. Dem auf Gewinn stehenden Spieler muss sich stets ein Gewinnzug bieten, sein Gegner darf aber keinen Zug finden, der das Blatt wendet:

¹⁵⁷ Für den hier verwendeten Sprachgebrauch von Gewinn- und Verlustpositionen sind die Bezeichnungen G und V sicherlich suggestiver als die allgemein in der Fachliteratur üblichen Abkürzungen N für next player wins beziehungsweise P für previous player wins.

2.10 Der Computer als Spielpartner

Wie denkt ein Schachcomputer?

Obwohl eine Informatik-Disziplin den Namen "künstliche Intelligenz" trägt, dürfte kein Zweifel daran bestehen, dass ein Computer im menschlichen Sinne nicht denkt. Allerdings kann ein Computer durchaus so agieren, als würde er denken. Ein gutes Beispiel sind Schachcomputer und -programme. Wie aber lassen sich Computer so programmieren, dass sie selbst bei kurzer Bedenkzeit erfolgreich Schach spielen? Die zu überwindenden Schwierigkeiten sind im Wesentlichen quantitativer Natur, da das Minimax-Prinzip zumindest eine theoretische Möglichkeit bietet, Gewinnaussichten algorithmisch zu berechnen. Aufgrund der unermesslich vielen Zugvarianten, die aus einer zu untersuchenden Position entstehen können, bleibt der Weg aber auf die Theorie beschränkt, sieht man einmal von einzelnen Endspielsituationen ab. Natürlich wird damit das Minimax-Prinzip keineswegs überflüssig. Schließlich entspricht es der von einem Spieler verfolgten Absicht, auf Nummer sicher zu gehen, das heißt risikoscheu so zu ziehen, dass ihm der Gegner möglichst wenig schaden kann. Wie aber können Minimax-Techniken praxisgerecht verkürzt und rechentechnisch umgesetzt werden, so dass selbst bei beschränkter Rechenzeit akzeptable Ergebnisse erzielbar sind?

Im Herbst 1977 wurde auf der Berliner Funkausstellung der "Chess Challenger 3", der erste in Serie hergestellte Schachcomputer, präsentiert. Ausgestattet mit einem 8-Bit-Mikroprozessor und nur wenigen Kilobyte Programm- und noch weniger Arbeitsspeicher war er imstande, mehr schlecht als recht Schach zu spielen. Es folgten Jahre, in denen jeweils rechtzeitig zur Weihnachtszeit regelrechte Wellen von Schachcomputern mit immer neuen Ausstattungen – Sensor-Brett, Drucker, Sprachmodul – in die Spielwarenabteilungen der Kaufhäuser schwappten. So wurde 1979 das Modell "Champion Super System III" allein in Deutschland 200000-mal verkauft. Dank immer besserer Hardware konnte die Spielstärke erheblich gesteigert werden, besonders seit der Verlagerung auf PC-Programme. Nicht nur das Spielen gegen einen Computer ist daher heute alles andere als ungewöhnlich, selbst an das Verlieren hat man sich inzwischen gewöhnt. Denn gute Programme spielen so stark, dass selbst Turnierspieler kaum noch eine Gewinnchance haben. Und selbst der amtierende Schachweltmeister Garri Kasparow musste sich 1997 in einem Turnier gegen den Computer Deep Blue geschlagen geben. Immerhin endete ein 2002 veranstaltetes Turnier zwischen Kasparows Nachfolger Kramnik und dem Schachprogramm Deep Fritz unentschieden.

Sieht man einmal von dem schon in Kapitel 2.1 erwähnten, auf einer Täuschung beruhenden schachspielenden Türken ab, dann wurde die erste Schachmaschine 1890 von dem Spanier Torres y Quevedo (1852-1936) gebaut. Sie war imstande, Endspiele mit König und Turm gegen König zu spielen. Die elektromechanische Konstruktion war ganz auf die spezielle Situation ausgerichtet, enthielt also anders als die von Babbage etwa sechzig Jahre zuvor geplanten Rechenmaschinen keine universellen Elemente. Eine zweite, aus dem Jahre 1920 stammende Version von Torres kunstvoller Maschine ist noch heute in der Universität von Madrid zu besichtigen¹⁶⁸.

¹⁶⁸ Eine Abbildung findet man in Dieter Steinwender, Frederic A. Friedel, Schach am PC, Haar 1995, S. 32

Die beiden eigentlichen Pioniere des Computerschachs sind der Amerikaner Claude Shannon (1916-2001) und der Engländer Alan Turing (1912-1954). Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts überlegten sie unabhängig voneinander und noch auf einem rein theoretischen Niveau, wie eine Rechenmaschine im Prinzip Schach spielen kann. Angesichts der zu dieser Zeit beginnenden Entwicklungen universell progammierbarer Rechner war die Zeit dafür einfach reif: In Deutschland experimentierte seit 1936 Konrad Zuse (1910-1995), der sogar ausdrücklich auch Anwendungen auf das Schach erwog¹⁶⁹, in den USA entstand zwischen 1939 und 1944 der mit Relais arbeitende MARK I und zwischen 1943 und 1945 der erste elektronische, mit 17000 Röhren arbeitende Rechner ENIAC. Die erste von-Neumann-Maschine, das heißt der erste Rechner mit dem noch heute üblichen einheitlichen Speicher für Daten und Programm, war der 1949 in England fertig gestellte EDSAC-Rechner.

Computer - was sie können und wie man sie dazu bringt

Um zu erläutern, wie ein Spielprogramm arbeitet, ist es sicherlich nicht sinnvoll, die Funktionsweise eines Computers von "Adam und Eva" an zu beschreiben. Deshalb gehen wir von einem mehrere Systemebenen unter sich lassenden Niveau aus, wie es moderne Programmiersprachen wie etwa PASCAL, C, C++, FORTRAN und BASIC bieten¹⁷⁰. Diese Sprachen erlauben es, mathematische Algorithmen Schritt für Schritt, das heißt zerlegt in elementare arithmetische und logische Operationen, in einer Formelähnlichen Weise so zu beschreiben, dass sie von einem Computer mit Hilfe von universellen Übersetzungs- und Systemprogrammen durchgeführt werden können.

Erzielte Zwischenergebnisse werden bis zur weiteren Verwendung zwischengespeichert, was organisatorisch mit Hilfe so genannter Variablen geschieht, bei denen es sich um frei wählbare Benennungen von Speicherbereichen handelt – weit komfortabler als die hardwaremäßig realisierte Durchnummerierung der Speicherzellen. Standardmäßig kann jede Variable eine ganze, betragsmäßig nicht zu große Zahl speichern. Will man beispielsweise das Ergebnis der Berechnung 234·123 – 34·91 unter dem Namen Alpha zwischenspeichern, so geschieht das im Programm – abhängig von der verwendeten Programmiersprache – etwa in der folgenden Weise:

```
Alpha = 234 * 123 - 34 * 91

Mit Anweisungen wie

Beta = 2 * Alpha + 15

Alpha = Alpha - 1
```

kann nun der unter dem Namen Alpha gespeicherte Zwischenwert gelesen und weiterverarbeitet werden, wobei sich im zweiten Fall der Alpha-Wert ändert. Die letzte Anweisung verdeutlicht auch sehr gut, dass Variablen einen anderen Charakter als mathe-

¹⁶⁹ In seiner 1945 erstellten Schrift Das Plankalkül, so bezeichnete Zuse seine Symbolsprache zur Beschreibung einer auszuführenden Berechnung, ist der "Schachtheorie" das letzte Kapitel gewidmet. Dort sind Züge und die Prüfungen auf einige positionelle Eigenschaften mit dem Plankalkül dargestellt. Einem breiteren Kreis wurde Zuses Schrift erst durch den 1972 erschienenen Nachdruck bekannt. Wie Zuse darin anmerkt, lernte er für seine Untersuchungen sogar eigens das Schachspiel: Konrad Zuse, Das Plankalkül, Kommentierter Nachdruck der Fassung von 1945, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Sankt Augustin 1972, S. 35 f., 235-285.

¹⁷⁰ Obwohl inzwischen schon etwas betagt, ist immer noch das Buch Niklaus Wirth, *Algorithmen und Datenstrukturen*, Stuttgart 1975 eine sehr zu empfehlende Referenz.

schach, die er anschließend in zwei Artikeln veröffentlichte¹⁷². Bezogen auf die Technik skizziert Shannon darin kurz das Prinzip eines Computers und seines Programmes; anschließend macht er einen Vorschlag, wie eine Schachposition in einem Rechner gespeichert werden kann. Jede Figur erhält eine eindeutige Identifikationsnummer: bei Weiß erhält ein Bauer die 1, ein Springer die 2, ein Läufer die 3, ein Turm die 4, die Dame die 5 und der König die 6. Für Schwarz werden die entsprechenden negativen Zahlen verwendet, und 0 entspricht dem leeren Feld. Steht für jedes Brettfeld eine Zelle des Computerspeichers zur Verfügung, lässt sich so die Figurenkonstellation einer Position speichern. Das heißt, abgesehen von den Zusatzdaten, die das Zugrecht, die Rochade, das en-passant-Schlagen und die 50-Zug-Regel betreffen, reichen 64 Speicherzellen aus, um eine Position zu speichern.

Als grundlegendes Prinzip eines Schachprogrammes beschreibt Shannon das Minimax-Verfahren. Das heißt, sind erst mal die Zugmöglichkeiten der beiden Spieler in Form von Zuglisten generiert, wird der beste Zug unter der Annahme ausgewählt, dass der Gegner anschließend mit dem aus seiner Sicht günstigsten Zug kontert. Einschränkend bemerkt Shannon, dass eine vollständige Analyse von einem Computer keinesfalls bewältigt werden kann. Als Ausweg schlägt er daher vor, nur die ersten Züge der denkbaren Varianten zu untersuchen und die Gewinnaussichten der dann erreichten Positionen zu schätzen. Dazu verwendet Shannon eine fiktiven Bauerneinheit, wobei er beim Material mit den Werten 9-5-3-3-1 für Dame, Turm, Läufer, Springer und Bauer auf unter Schachspielern gebräuchliche Schätzwerte zurückgreift. Da der König unverzichtbar ist, erhält er einen Wert von 200, so dass er nicht mit anderen Vorteilen aufgewogen werden kann. Verfeinert wird die Bewertung dadurch, dass positionelle Eigenschaften zusätzliche Bonus- beziehungsweise Malus-Punkte bewirken. So zieht Shannon in seiner beispielhaften Bewertung 0,5 Punkte für jeden isolierten Bauer, zurückgebliebenen Bauer oder Doppelbauer ab, während er die Mobilität dadurch berücksichtigt, dass jeder erlaubte Zug 0,1 Bonuspunkte bringt. Als Schätzung der Gewinnaussichten wird schließlich die Differenz der auf diesem Weg erhaltenen Punktzahlen von Weiß und Schwarz verwendet.

Um eine Variante realistisch zu bewerten, muss sie nach Shannon "zur Ruhe" kommen. So wäre es völlig unsinnig, Positionen mitten in einem Schlagabtausch abzuschätzen, da dann selbst das dümmste Schlagen eines gedeckten Bauern mit der Dame allein deshalb als günstig erscheint, weil es einen vermeintlichen Materialgewinn bringt. Vermieden werden solche Missstände, wenn die Gewinnaussichten nur bei "ruhigen" Positionen geschätzt werden, womit Positionen gemeint sind, bei denen der Gegner mit seinem nächsten Zug keine zu starke Änderung des Schätzwertes bewirken kann. Diese so genannte **Ruhesuche** ist noch heute ein wesentlicher Bestandteil jedes Schachprogrammes.

Bezogen auf die zu untersuchenden Zugvarianten beschreibt Shannon zwei verschiedene Ansätze, denen er die noch heute gebräuchlichen Bezeichnungen A- und B-Strategie gibt. Der Unterschied besteht darin, dass entweder alle Zugvarianten abgesehen von der Ruhesuche bis zu einer bestimmten Tiefe oder aber nur ausgewählte Varianten, diese dafür aber um-

^{152-154.}

¹⁷² C. E. Shannon, Programming a computer for playing chess, Philosophical Magazine, 41 (1950), 256-275, nachgedruckt in David N. L. Levy, Compendium of computer chess, London 1988, S. 2-13; C. E. Shannon, A chess-playing machine, Scientific American, 182 (Feb. 1950), S. 48-51, nachgedruckt in David N. L. Levy, Computer games I, New York 1988, S. 81-88. Beide Artikel sind ebenfalls nachgedruckt in Claude Elwood Shannon, Collected Papers, New York 1993, S. 637-656, S. 657-666.

so genauer untersucht werden. Der **A-Strategie** sind aufgrund der enormen Vielfalt von Zugmöglichkeiten enge Grenzen gesetzt – als grober Anhaltspunkt dienen kann die Zahl der im ersten Zug erlaubten Züge, nämlich 20. Schon nach nur zwei Doppelzügen entspricht das bereits etwa $20^4 = 160000$ Zugvarianten. Eine Vorauswahl von plausiblen Zügen, so wie sie ein erfahrener Schachspieler schnell und zielsicher trifft, wäre daher ungemein nützlich. Nur so lässt sich nämlich verhindern, dass der Computer die meiste Zeit mit absurden Varianten vergeudet. Gemeint sind damit Varianten, die zumindest einen Zug enthalten, der für den betreffenden Spieler offenkundig nicht der erfolgversprechendste ist. Zum Beispiel macht es eigentlich keinen Sinn, für Weiß den Eröffnungszug a2 - a3 zu untersuchen. Andererseits kann – wie man es von Schlüsselzügen in Problemstellungen her kennt – ein ungewöhnlicher Zug durchaus eine überraschende Wendung einleiten.

Einem guten Schachspieler wird die selektive **B-Strategie** durch seine Erfahrung ermöglicht. Sie gestattet es ihm, schnell typische Muster einer Position zu erkennen, von denen einige sogar eigene Bezeichnungen besitzen: Doppelbauern, Freibauer, isolierter Bauer, rückständiger Bauer, verbundene Bauern, offene Linie, Fesselung, Deckung, Opfer, Tempo, Gabel, Abtausch, Qualität, Decken, Zugzwang, Abzugsschach, Doppelschach, ersticktes Schach und Zwischenschach. Mit jedem Begriff verbindet der Spieler eine Bibliothek von Erfahrungen: Welche Felder und Figuren sind bedroht, welche Figuren sind maßgebend und was ist zu tun? Und selbst wenn er in einer von ihm als unbedeutend erachteten Variante eine Falle übersieht, so mag das für ihn in der konkreten Partie verhängnisvoll sein. Andererseits wird er persönlich um eine Erfahrung reicher. Ohne dass sein "Programm" geändert werden muss, lernt ein Schachspieler hinzu. Mit immenser Übung und praktischer Erfahrung kann es ihm auf diese Weise schließlich gelingen, sein Spiel zur Meisterschaft zu perfektionieren.

Das menschliche Vorgehen auf ein statisches, höchstens in wenigen Bewertungsparametern anpassbares Programm zu übertragen, ist bis heute nicht einmal im Ansatz gelungen. Die meisten Schachprogramme verfolgen daher im Prinzip eine A-Strategie, das heißt, es werden a priori keine vermeintlich absurden Züge aussortiert. Die so erzielten Ergebnisse sind vor allem dank der Fortschritte auf dem Gebiet der Hardware – selbst ein heutiger PC ist einem Großrechner der 1960er Jahre deutlich an Geschwindigkeit und Speicherplatz überlegen – beeindruckend. So wurde 1995 die Marke von 100000 pro Sekunde untersuchten Positionen mit handelsüblicher Hard- und Software erreicht. Vom rein pragmatischen Standpunkt kann daher bei der A-Strategie die mangelnde Eleganz der brutalen Holzhammer-Methode – bereits Shannon sprach von **brute force** – ohne weiteres hingenommen werden.

Alan Turing, der zweite Pionier des Computerschachs, hatte 1936 ein theoretisches, heute Turing-Maschine genanntes Rechnermodell ersonnen, um Grenzen algorithmischer Berechnungen nachzuweisen – wir werden darauf noch im nächsten Kapitel zurückkommen. Seit Ausbruch des Zweiten Weltkrieges arbeitete Turing in einer Dienststelle des britischen Geheimdienstes an der Entschlüsselung der von der deutschen Wehrmacht verwendeten ENIGMA-Chiffriermaschine. Der Erfolg der wissenschaftlichen Sonderabteilung, der auch zwei bekannte Schachspieler angehörten, wird oft als eins der kriegsentscheidenden Ereignisse angesehen, wohl ein Grund dafür, dass wesentliche Teile der Ergebnisse noch heute geheim sind. Turing, der selbst kein guter Schachspieler gewesen sein soll, hat wahrscheinlich in dieser Zeit damit begonnen, einen Algorithmus zu suchen, mit dem zu einer beliebigen Schachposition ein einigermaßen akzeptabler Zug gefunden werden kann. Dazu suchte Turing einen Weg, Positionen und Zugfolgen möglichst einfach und trotzdem meist korrekt zu bewerten.

wicklungen zu "kurzsichtig" sein, etwa dann, wenn ein menschlicher Gegner Material zugunsten positioneller Vorteile und Angriffschancen opfert, ohne dass zu diesem Zeitpunkt – für Mensch wie Maschine – bereits ein direktes Matt absehbar wäre.

Wenn heutige Schachprogramme nach der A-Strategie verfahren, so tun sie es nicht ganz in dem von Shannon ursprünglich gedachten Sinn. Es werden nämlich keineswegs alle Zugvarianten gleichberechtigt untersucht, und Ausnahmen beziehen sich nicht nur auf die von Shannon bereits vorgeschlagene Ruhesuche. Bei der Analyse unberücksichtigt bleiben solche Varianten, die nachweislich das Ergebnis nicht beeinflussen. Welche aber sind das und wie können sie erkannt werden? Versetzen wir uns dazu in die Lage eines am Zug befindlichen Schachspielers, der gerade einen konkreten Zug darauf prüft, ob er ihm vorteilhaft erscheint. Finden wir bei unserer Analyse eine für uns selbst ungünstige Erwiderung des Gegners, werden wir unseren Plan als "widerlegt" einstufen und sofort verwerfen. Insbesondere wäre es völlig sinnlos, weitere Erwiderungen des Gegners zu untersuchen. Ob der Gegner noch effektivere Widerlegungen besitzt und wie schlecht der geplante Zug tatsächlich für uns ist, hat keine praktische Bedeutung.

Was zeigt das Denkmodell? Züge, die aufgrund einer gefundenen Widerlegung keinen genügenden Gewinn bringen, brauchen nicht weiter untersucht werden. Was "genügend" im konkreten Fall bedeutet, kann durchaus unterschiedlich sein. Am häufigsten ist der Fall, dass die Gewinnaussichten eines anderen Zuges bereits ausreichend genau untersucht wurden und daher eine Mindestforderung an weitere Züge bewirken. Züge, die diesen Anforderungen nicht entsprechen, sind im relativen Sinn widerlegt und werden nicht weiter untersucht. Denkbar ist aber auch der Fall, dass die Mindestanforderungen schon zu Anfang als reiner Anspruch formuliert werden, ohne dass zunächst ein Zug bekannt ist, der diese Forderungen erfüllt. Auch bei diesem Ansatz brauchen widerlegte Züge nicht mehr weiter untersucht zu werden. Im Unterschied zum ersten Fall kann es aber passieren, dass alle Züge widerlegt werden, etwa deshalb, weil es überhaupt keinen genügend guten Zug gibt. In diesem Ausnahmefall muss dann die Analyse, nun mit abgesenkten Anforderungen, wiederholt werden.

Die Technik, widerlegte Züge nicht mehr weiter zu untersuchen, kann innerhalb von Zugvarianten auch an späterer Stelle praktiziert werden. Dabei können beide Spieler ihre Ansprüche erheben, und zwar jeweils bezogen auf die Ergebnisse zuvor abgezweigter und bereits untersuchter Zugvarianten. Zweckmäßig und übersichtlich organisieren lassen sich die Mindestanforderungen an Zugvarianten durch zwei Parameter, deren Werte mit dem Voranschreiten einer Variante ständig aktualisiert werden. Da die Werte meist mit den griechischen Buchstaben α und β bezeichnet werden, hat sich für das Verfahren der Name Alpha-Beta-**Algorithmus** eingebürgert. Der α -Wert beschreibt die Mindestanforderung von Weiß an eine Position. Immer dann, wenn die Position seiner Mindestanforderung nicht gerecht wird, sucht Weiß seinen Erfolg auf anderen Wegen, das heißt, die betreffende Position wird gar nicht erreicht. Umgekehrt beinhaltet der β-Wert die Mindestanforderung des Gegners Schwarz. Das heißt, sollte die Position einen Zug ermöglichen, mit dem sich Weiß mehr als den β-Wert sichern kann, dann wird Schwarz das Entstehen dieser Position verhindern. Zusammen ergeben die Parameter einen Akzeptanzbereich, der alle Zahlen von mindestens α und höchstens β umfasst. Alle Varianten, die zu Positionen führen, deren Werte außerhalb liegen, können von einem der beiden Spieler verhindert werden. Da jede abzweigende und schon untersuchte Variante weitere Einschränkungen bringen kann, kann sich der Akzeptanzbereich mit dem Voranschreiten einer Variante nie vergrößern, sondern nur verkleinern oder gleich bleiben.

Wie der Alpha-Beta-Algorithmus konkret funktioniert, wird am besten anhand von Beispielen deutlich. Die beiden einfachen Spiele, die wir untersuchen wollen, sind als Baumgraphen dargestellt, wie wir sie schon in Kapitel 2.1 kennen gelernt haben, wobei die Zugvarianten in der Reihenfolge von links nach rechts untersucht werden. Im ersten Beispiel, das in Bild 31 dargestellt ist, sind für die Ermittlung des Minimax-Wertes diejenigen Positionen unerheblich, die mit einem Fragezeichen anstatt einer Gewinnhöhe markiert sind.

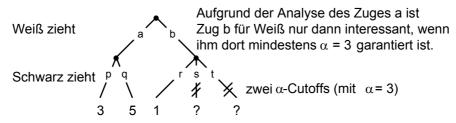


Bild 31 Zwei α -Cutoffs

Hat Weiß den linken Zug a untersucht und dabei erkannt, dass dieser ihm einen Gewinn von 3 garantiert, dann wird er eine andere Variante nur dann anstreben, wenn er dort ebenfalls mindestens $\alpha=3$ als Gewinn garantiert bekommt. Beim Zug b zeigt aber bereits die erste Erwiderung r, dass Weiß auf diesem Weg keine solche Garantie erwarten kann. Weitere Fortsetzungen wie die Züge s und t brauchen deshalb nicht untersucht zu werden – es kommt zu so genannten α -Cutoffs.

Sind umgekehrt die von Schwarz gestellten Mindestanforderungen nicht erfüllt, kommt es zu einem so genannten β-Cutoff. Um ein Beispiel zu erhalten, modifizieren wir das gerade untersuchte Spiel dahingehend, dass mit dem Zug q noch keine Endposition erreicht wird. Die so entstehende Position ist in Bild 32 dargestellt.

Auch in Bild 32 ist die durch das Fragezeichen ersetzte Gewinnhöhe völlig unerheblich, da der Zug q für Schwarz in jedem Fall ungünstig ist. Dadurch, dass Schwarz mit dem Zug p den Gewinn von Weiß auf 3 begrenzen kann, muss Schwarz innerhalb der mit dem Zug a beginnenden Variante seinem Kontrahenten keinen höheren Gewinn als $\beta=3$ zugestehen. Die Zugalternative q scheidet daher allein aufgrund der Erwiderung y bereits aus.

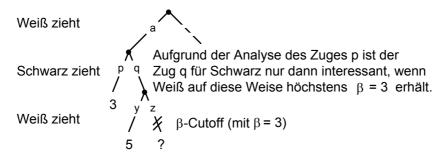


Bild 32 Ein β -Cutoff

Obwohl das Prinzip der α - und β -Cutoffs sehr plausibel ist und von jedem guten Schachspieler implizit angewandt wird, hat es beginnend von Shannons und Turings Anfängen an-

nähernd ein Jahrzehnt gedauert, bis es für die Schachprogrammierung erkannt wurde. Erste Ansätze enthält die Beschreibung eines 1958 konzipierten Programmes von Allen Newell, J. C. Shaw und H. A. Simon¹⁷⁴, die ihre Minimax-Suche auf der Basis einer einseitigen Akzeptanz-Schwelle organisierten. Ausgewählt wurde jeweils der erste Zug, der diese Schwelle übertraf, wobei Cutoffs in späteren Zügen explizit noch nicht erwähnt wurden. Bis das α-β-Verfahren in voller Form entwickelt war, dauerte es nochmals mehrere Jahre¹⁷⁵. Dies ist insofern sehr bemerkenswert, da der α-β-Algorithmus gegenüber dem normalen Minimax-Verfahren erheblich schneller ist, so dass bei gleicher Rechenzeit die Suchtiefe immerhin annähernd verdoppelt werden kann^{XL}! Anders als bei der normalen Minimax-Suche hängt der für den α-β-Algorithmus erforderliche Aufwand aber davon ab, in welcher Reihenfolge die Züge untersucht werden. Untersucht man nämlich gute Züge zuerst - sei es aufgrund einer geschickten Vorauswahl oder aber rein zufällig -, kommt es zu vielen Cutoffs, was die Rechenzeit stark verkürzt. Wie aber lassen sich viel versprechende, das heißt mutmaßlich gute Züge erkennen? In der Praxis haben sich dafür verschiedene Ansätze bewährt. Da ihre Effizienz nicht in jedem Einzellfall gesichert ist, wohl aber im Rahmen praktischer Erfahrung bestätigt wurde, spricht man von heuristischen Methoden:

- Zugvarianten, die bei einer Analyse mit eingeschränkter Suchtiefe, etwa bei der Untersuchung für den vorhergehenden Zug, für gut befunden wurden, sind sicherlich aussichtsreich.
- Schlagzüge, insbesondere wenn es sich um ein Zurückschlagen handelt, sind oft vorteilhaft
- Viel versprechend sind ebenso Züge, die bereits in parallelen Zugvarianten als gut erkannt wurden. Die entsprechende Technik wird Killer-Heuristik genannt. Dazu werden die jeweils besten Züge statistisch erfasst, um für andere Varianten Vorauswahlen treffen zu können.
- Intuitiv erscheint es plausibel, dass ein Zug nur dann gut sein kann, wenn er Aussichten dergestalt eröffnet, dass ein unmittelbar anschließender Zug desselben Spielers eine spürbare Verbesserung der Position ermöglicht. Das dabei fiktiv gestrichene Zugrecht des Gegners hat diesem Ansatz seinen Namen gegeben, nämlich Nullzug oder Null-Move. Die Nullzug-Technik wird von einigen erfolgreichen Sachprogrammen wie dem PC-Programm Fritz sogar oft zum Forward Pruning im Sinne einer B-Strategie verwendet. Allerdings kann diese Art des Einsatzes unter Umständen, vor allem im Endspiel, recht heikle Konsequenzen haben, da das Zugrecht nämlich keineswegs immer etwa in Zugzwang-Situationen von Vorteil ist.

Außerdem lässt sich die Anzahl der Cutoffs durch ein Hoffnungsprinzip erhöhen, wenn apriori-Ansprüche formuliert werden. Dazu wird auf der Basis einer Analyse mit eingeschränkter Suchtiefe ein Alpha-Beta-Suchfenster vorgegeben, zu dem dann mindestens eine Zugvariante gefunden werden muss, die darin liegt.

¹⁷⁴ Allen Newell, J. C. Shaw, H. A. Simon, *Chess-playing programs and the problem of complexity*, IBM Journal for Research and Development, <u>2</u> (1958), S. 320-335, Nachdrucke: David N. L. Levy, *Computer games I*, New York 1988, S. 89-115; David N. L. Levy, *Compendium of computer chess*, London 1988, S. 29-42.

¹⁷⁵ Eine Standardreferenz zum α-β-Algorithmus, die auch die geschichtliche Entwicklung berücksichtigt, ist Donald E. Knuth, Ronald W. Moore, *An analysis of Alpha-Beta-pruning*, Artificial Intelligence, 6 (1975), S. 293-326. Siehe auch Alexander Reinefeld, *Spielbaum-Suchverfahren*, Informatik Fachberichte 200, Berlin 1989, S. 21 ff.

Nullfenster-Suche

Meist werden die Schätzwerte, mit denen die Gewinnaussichten der Positionen am Suchhorizont abgeschätzt werden, größenmäßig so normiert, dass sie stets ganze Zahlen sind. In diesem Fall sind auch die daraus berechneten Minimax-Werte allesamt ganze Zahlen. Ein Alpha-Beta-Suchfenster, das in der Lücke zwischen zwei ganzen Zahlen liegt, kann damit keinen Minimax-Wert enthalten – man spricht daher von einer **Nullfenster-Suche**. Eine Berechnung des Minimax-Wertes ist bei einem solchen Ansatz natürlich *keinesfalls* zu erwarten. Allerdings wird – wie wir noch sehen werden – der Alpha-Beta-Algorithmus in der Regel so programmiert, dass bei vollständigem Cutoff zumindest die Information ermittelt wird, ob der Minimax-Wert oberhalb des Suchfensters liegt oder ob er darunter liegt. Damit erlaubt die Nullfenster-Suche eine relativ effiziente Beantwortung der Frage, ob der Minimax-Wert eine vorgegebene Schranke übertrifft.

Die Nullfenster-Suche wird in unterschiedlicher Weise angewendet: Neben heuristischer Verwendung zur Vorsortierung möglicher Züge sind die so genannte L-Verbesserung des Alpha-Beta-Algorithmus sowie vor allem das Negascout-Verfahren zu nennen:

Bei der **L-Verbesserung** des Alpha-Beta-Algorithmus, genannt auch **last move improvement**, wird für jede Position der zuletzt untersuchte Zug in einem Nullfenster untersucht. Somit ergibt sich als Resultat für diesen zuletzt untersuchten Zug "nur" die – zumindest im obersten Zuglevel völlig ausreichende – Aussage, ob dieser Zug besser ist als die zuvor untersuchten Züge.

Dem Negascout-Verfahren liegt die Hoffnung zugrunde, dass die für eine Position zuerst untersuchte Zugmöglichkeit bereits die beste ist – bei geschickt heuristisch vorgenommener Vorsortierung der Züge ist diese Hoffnung übrigens keineswegs abwegig. Nach der Untersuchung der ersten Zugmöglichkeit wird daher jeder weitere Zug mittels Nullfenster-Ansatz daraufhin überprüft, ob er tatsächlich nicht besser ist als der erste Zug. Bestätigt sich die Hoffnung, so hat man dank vieler Cutoffs einen effizienten Nachweis dafür erhalten, dass der erste Zug tatsächlich der beste ist. Im gegenteiligen Fall wird das Prozedere beim Auffinden einer besseren Zugmöglichkeit sofort abgebrochen, um es dann für die aktuell untersuchte Position – nun aber mit verkürzter Zugliste und einem neuen Kanditaten als hoffentlich bestem Zug – direkt nochmals zu starten.

Die Suche lässt sich noch mehr beschleunigen, wenn Zugumstellungen berücksichtigt werden, das heißt, wenn Positionen, die in zwei oder mehreren Varianten vorkommen, nur noch einmal untersucht werden. Dazu muss ein Teil der Zwischenergebnisse, wie sie bei der Analyse einer Zugvariante anfallen, für die anschließend zu untersuchenden Zugvarianten gespeichert werden. Das setzt selbstverständlich viel Speicherplatz voraus, weswegen solche Konzepte erst in den 1970er Jahren realisiert wurden. Zwischenergebnisse nur zu speichern, reicht aber nicht. Vielmehr müssen gespeicherte Ergebnisse auch schnell wiedergefunden werden können. Bestens dafür bewährt hat sich die erstmals 1980 von Joe Condon und dem UNIX-Mitbegründer Ken Thompson in ihrem Spezialrechner Belle verwendete **Hash-Tabelle**, bei der jede Position eine Index-Nummer, beispielsweise zwischen 0 und 2³² – 1, erhält. Dabei können unterschiedliche Positionen durchaus gleiche Indizes haben, obwohl solche Kollisionen relativ selten sind. Ist die innerhalb einer Zugvariante entstehende Position vollständig untersucht, wird das Ergebnis, gegebenenfalls zusammen mit den Daten der Position, unter dem zugehörigen Hash-Index gespeichert, womit das Ergebnis für die Analy-

Mit Hilfe von Hash-Tabellen können auch einige Endspiel-Situationen untersucht werden, deren Untersuchung mit dem normalen Alpha-Beta-Verfahren völlig aussichtslos wäre. Um spezielle Endspiele wie zum Beispiel König mit Läufer und Springer gegen König vollständig zu analysieren, ist es allerdings günstiger, Ablauf und Speicherverwaltung an die besonderen Gegebenheiten anzupassen (siehe Kasten).

Endspieldatenbanken

Endspiele gehören zur klassischen Schachtheorie. Angefangen vom einfach zu gewinnenden Endspiel König mit Turm gegen König, über das schon etwas anspruchsvollere Endspiel König mit Läufer und Springer gegen König wurden bereits im 19. Jahrhundert deutlich kompliziertere Figurenkonstellationen wie zum Beispiel König mit Läuferpaar gegen König und Springer untersucht.

Natürlich ist es reizvoll, die klassischen Endspiel-Analysen mit einem Computer überprüfen und erweitern zu können. Um eine Figurenkonstellation vollständig zu untersuchen, generiert man eine Datenbank, die zu jeder möglichen Position des untersuchten Typs die Gewinnaussichten enthält. Das entspricht im Wesentlichen der in Kapitel 2.9 beim Spiel Nimbi angewandten Technik. Im Vergleich zu Nimbi sind Schach-Endspiele allerdings komplizierter und das nicht nur aufgrund der Vielfalt. Das liegt zum einen daran, dass Schach im Gegensatz zu Nimbi nicht neutral ist. Neben der Figurenkonstellation ist also immer auch das Anzugsrecht zu berücksichtigen. Zum anderen können sich Positionen eines Endspiels nach einigen Zügen wiederholen.

Vor der eigentlichen Untersuchung eines speziellen Endspieltyps werden bis auf Symmetrie alle möglichen Positionen erzeugt, wobei mit Hilfe eines Positions-Indexes zu jeder Position für das noch unbekannte Ergebnis ein Speicherplatz reserviert wird. Für alle Positionen wird angenommen, dass Weiß am Zug ist. Aussortiert werden alle regelwidrigen Positionen, bei denen beispielsweise Schwarz im Schach steht. Gefragt ist, ob Weiß seinen Gegner mattsetzen kann und wenn ja, wie viel Züge dafür notwendig sind.

Die eigentliche Analyse kann dadurch erfolgen, dass alle Positionen nacheinander mit einer Suchtiefe von 1, 3, 5, ... Zügen untersucht werden, wobei die Positionen am Suchhorizont nur danach unterschieden werden, ob Weiß ein Matt erzielen konnte oder nicht. Werden für jede Suchtiefe die Ergebnisse der bereits untersuchten Suchtiefen berücksichtigt, müssen effektiv nur die beiden hinzugekommenen (Halb-)Züge Minimax-mäßig untersucht werden.

Schneller, aber komplizierter, ist die folgende Methode: Man beginnt mit den "einzügigen" Positionen, bei denen Weiß seinen Gegner im nächsten Zug mattsetzen kann. Mit einem rückwärts ablaufenden Minimax-Prozess werden anschließend nacheinander, nämlich Doppelzug für Doppelzug, die Positionen mit dem Charakter eines "Zweizügers", "Dreizügers" und so weiter konstruiert, wobei jeweils auf die schon vorhandenen Ergebnisse zurückgegriffen wird. So ist für die Ermittlung der zweizügigen Positionen, bei denen Weiß seinen Gegner in drei (Halb)-Zügen mattsetzen kann, ausgehend von den Einzügern ein Doppelzug umzukehren: Zunächst wird jeder denkbare Zug von Schwarz umgekehrt, so dass jede Position erzeugt wird, die einer der Einzüger-Positionen unmittelbar vorausgegangen sein könnte. Eine so gefundene Vorgänger-Position, die zusätzlich die Eigenschaft hat, dass *alle* ihre schwarzen Zugmöglichkeiten zu einzügigen Positionen führen, bildet eine Zwischenposition zwischen den einzügigen

Punkt, kann Weiß seinen Gewinn nur dann wirklich realisieren, wenn die 50-Zug-Regel für solche Endspiele entsprechend modifiziert wird.

Mit einem Konzept, mit dem bauernlose Endspiele hochgradig parallel analysiert werden können, gelang es Lewis Stiller zu Beginn der 1990er Jahre, noch deutlich kompliziertere Konstellationen vollständig zu klären¹⁷⁸. Gegenstand seiner Untersuchung waren die verschiedenen Endspiele, bei denen außer den beiden Königen noch vier Figuren, aber keine Bauern im Spiel sind. Die bemerkenswerteste Entdeckung ist die abgebildete KTS-KSS-Endspiel-Position, bei der es Weiß erst im 243. Doppelzug erzwingen kann, einen schwarzen Springer zu schlagen.



Obwohl hier die wesentlichen Ideen und Techniken von Schachprogrammen beschrieben wurden, dürfte es noch nicht unbedingt klar geworden sein, wie diese konkret programmiert werden können. Um zumindest einen Eindruck davon zu vermitteln, soll nun noch skizziert werden, wie sich das Kernstück, nämlich das Minimax- sowie das Alpha-Beta-Verfahren, programmieren lässt. Auf andere Bestandteile eines Schachprogrammes wie Ruhesuche und Hashing wird dabei bewusst verzichtet, um das Wesentliche der beiden Algorithmen so deutlich wie möglich hervortreten zu lassen.

Unterprogramme und Rekursion

Damit selbst umfangreiche Programme übersichtlich gestaltet werden können, empfiehlt es sich, Teilaufgaben mit weitgehend eigenständigen Unterprogrammen zu bearbeiten. Solche Unterprogramme verfügen über einen eigenen Variablenvorrat und stehen mit dem Rest des Programmes nur über ausdrücklich vereinbarte Variablen – als Eingabewerte und für die Ergebnisse – in Verbindung.

Alle modernen Programmiersprachen erlauben rekursive Unterprogramme, mit denen komplizierte Algorithmen oft einfacher umsetzbar sind. So berechnet man beispielsweise die Fakultät 5! durch den Aufruf fak5 = Fakultaet (5) des folgenden Funktions-Unterprogrammes:

```
FUNCTION Fakultaet(n)
   IF n = 0 OR n = 1 THEN
    Fakultaet = 1
   ELSE
    Fakultaet = n * Fakultaet(n - 1)
   END IF
END FUNCTION
```

¹⁷⁸ Lewis Stiller, *Multilinear algebra and chess endgames*, in: R. J. Nowakowski (ed.), *Games of no chance*, Cambridge 1996, S. 151-192; *Lohn der Geduld*, Spektrum der Wiss., 1992/4, S. 22-23.

Das Unterprogramm kann nur deshalb so funktionieren, weil von der Variablen n mit jedem Aufruf ein neues Exemplar angelegt wird - der Computer hat dafür einen ganz speziellen, Stack, Keller oder Stapel genannten Speicherbereich. Konzepten folgend, wie sie Ende der 1950er Jahre entwickelt wurden, verwaltet er dort alle Variablen von bereits begonnenen, aber noch nicht beendeten Unterprogrammen, und zwar unabhängig von Namensübereinstimmungen zu Variablen außerhalb des Unterprogrammes und für jeden Aufruf eines Unterprogrammes extra. Das heißt, alle im Unterprogramm auftretenden Variablen, einschließlich der internen für Ein-, Ausgabe, Zwischenergebnisse und erreichten Bearbeitungsstand, werden mit jedem Aufruf des Unterprogrammes für dessen Dauer neu angelegt. Organisiert wird der Stack nach dem last-in-first-out-Prinzip, ganz wie bei einem Schreibtisch, auf den laufend neue Aktenvorgänge zur Bearbeitung abgelegt werden, ohne dass die vorherigen bereits beendet wurden. Wird eine Arbeit beendet - ob Aktenvorgang oder Unterprogramm -, wird die zuletzt unterbrochene Tätigkeit mit ihrem zum Zeitpunkt der Unterbrechung erreichten Bearbeitungsstand fortgeführt. Konkret bedeutet dies, dass beim originalen Aufruf Fakultaet (5) das Unterprogramm zunächst bis zur Zeile

```
Fakultaet = 5 * Fakultaet(4)
```

abgearbeitet wird, wobei die Variable n sowie die internen Variablen für Zwischen-, Endergebnisse und erreichter Programmstelle im Stack gespeichert sind. Vor der Multiplikation wird nun die Berechnung unterbrochen. Weiter geht es mit einem erneuten Aufruf des Fakultaet-Unterprogrammes, und zwar auf der Basis eines neuen Variablen-Satzes, bestehend aus der Variablen n, diesmal mit dem Wert auf 4, und den internen Variablen für Zwischen-, Endergebnisse und erreichtem Bearbeitungsstand. Bis runter zum Wert 1 geht das so weiter. Erst am Schluss, wenn Fakultaet (1) sein Ergebnis mit Hilfe der entsprechenden internen Variablen an Fakultaet (2) abgeliefert hat, werden nacheinander die Unterprogramme Fakultaet (2), Fakultaet (3), Fakultaet (4) und schließlich Fakultaet (5) jeweils von der Unterbrechung an zu Ende geführt.

Wir beginnen nun damit, den Minimax-Algorithmus in einer an gebräuchliche Programmiersprachen angelehnten Weise zu formulieren, wie es bereits in den beiden Kästen gehandhabt wurde. Konkret wird ein Minimax-Unterprogramm realisiert, das den Minimax-Wert in Abhängigkeit der Suchtiefe n und der Ausgangsposition Position eines entsprechenden Variablentyps berechnet. Relativ einfach möglich ist das auf der Basis eines rekursiven Ansatzes (siehe dazu Kasten *Unterprogramme und Rekursion*). Die Bestimmung des eigentlich interessierenden Ergebnisses, nämlich des besten Zuges, ist nicht dargestellt, kann aber für die erste Suchtiefen-Stufe problemlos eingefügt werden.

```
FUNCTION Minimax(n, Position)

IF n = 0 THEN

Minimax = Schaetzwert(Position)

ELSEIF Position.AmZug = Weiss THEN

(bestimme Positionen P(1), ..., P(s), zu denen Weiß

ausgehend von Position ziehen kann)

IF s = 0 THEN

Minimax = Gewinn(Position)

ELSE

MaxWert = -unendlich
```

des gerade ziehenden, seinen eigenen Gewinn *maximierenden* Spielers gesehen wird. Die so konzipierten Varianten der beiden Algorithmen heißen **Negamax-**Versionen.

Bei der praktischen Schachprogrammierung unbedingt zu vermeiden sind die Positionsvariablen P(1), ..., P(s), für deren Initialisierung viele Bytes kopiert werden müssen. Effektiver ist es, die in der Variablen Position gespeicherten Daten direkt zu ändern. Allerdings müssen in diesem Fall die Originaldaten wiederhergestellt werden, wenn ein Zug fertig analysiert ist. Konkret muss dazu der Zug zurückgenommen werden.

Maschinelles Lernen und Monte-Carlo-Spielbaumsuche

Minimax- und Alpha-Beta-Suche eignen sich universell für jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit perfekter Information. Die so erzielten Resultate sind exakt, sofern der Spielbaum jeweils bis zum Ende durchlaufen werden kann, was aber in der Praxis "richtiger" Spiele aufgrund der dafür notwendigen Rechenzeit de facto unerreichbar ist. Die Kunst der Spielprogrammierung besteht daher darin, die beschränkte Ressource der Rechenzeit bestmöglich zu nutzen, indem die – nicht unbedingt konstante – Suchtiefe sowie das für die Positionen am Suchhorizont verwendete Verfahren zur Schätzung der Gewinnausschichten in Form des Minimax-Wertes möglichst gut auf die Eigenschaften des zu untersuchenden Spiels ausgerichtet werden. Dabei werden in der Schätzfunktion in der Regel einfach erkennbare Positionsmerkmale wie die Anzahlen, Standorte und Mobilitäten der diversen Spielsteintypen im Rahmen einer Summe geeignet, das heißt in der Regel insbesondere mit gegenteiligem Vorzeichen für die beiden Spieler, gewichtet.

Wie stark spielspezifisch und damit letztlich außerhalb rein mathematischer Ansätze vorgegangen werden muss, zeigt bereits ein Vergleich zwischen Schach und Backgammon: Eine Position im Mittelspiel des Schachs kann unter Umständen durch das Verrücken eines einzelnen Bauern um nur ein Feld von einer Gewinn- in eine Verlustposition verwandelt werden. Verrückt man dagegen bei einer Backgammonposition einen Stein um ein Feld, wird dadurch der Wert der Position, bei dem es sich aufgrund des Zufallseinflusses um einen Erwartungswert handelt, relativ wenig geändert. Außerdem ist der Spielbaum des Backgammon aufgrund des zusätzlichen Würfeleinflusses stärker verzweigt als der Spielbaum des Schach. Backgammon ist damit ein Spiel, bei dem es eher lohnend erscheint, nach guten Schätzfunktionen für den Wert einer Position zu suchen, während beim Schach eher der Fokus auf einer effizienten Durchsuchung des Spielbaums liegen sollte.

Wie aber findet man eine "gute", das heißt eine sich im praktischen Einsatz bewährende, Schätzung des aktuellen Positionswertes? Wie lassen sich Wissen und Erfahrung über ein Spiel für die Konstruktion einer Schätzfunktion nutzen? Ist es sogar möglich, eine gute Schätzfunktion ohne Spielerfahrung rein auf Basis der Spielregeln mit universellen Methoden zu generieren?

Die Ansätze zu den aufgeworfenen Fragen sind so vielfältig wie die Charaktere der Brettspiele, für die Spielprogramme implementiert wurden. Wir begnügen uns daher mit einem kurzen Überblick¹⁷⁹.

¹⁷⁹ Für weitere Details und Referenzen wird verwiesen auf: Johannes Fürnkranz: *Machine learning in games: A survey*, in: J. Fürnkranz, M. Kubat, *Machines that learn to play games*, Huntington, 2001.

Eine Schätzfunktion für den Wert einer Position ist in der Regel eine einfache Rechenvorschrift in Form einer gewichteten Summel 180, bei der die gewichteten Summanden leicht erkennbaren, quantitativen Eigenschaften der Position entsprechen, die aufgrund der Spielerfahrung als wesentlich für die Abschätzung der Gewinnaussichten gelten. Für das klassische Beispiel des Schachspiels handelt es sich bei diesen Positionseigenschaften insbesondere um die Anzahlen der verschiedenen Figurentypen sowie um Zähler für deren Mobilität. Es wurde bereits erwähnt, dass schon die Pioniere der Schachprogrammierung Shannon und Turing diese Parameter verwendeten.

Wie können aber die Gewichte, beim Schach etwa ausgehend von Shannons auf Basis von Spielerfahrung festgelegten Werten ± 200 , ± 9 , ± 5 , ± 3 , ± 3 , ± 1 für die verschiedenen Figurentypen, durch einen automatisierten Lernprozess optimiert werden? Zwei prinzipielle Ansätze gibt es dazu:

- Einerseits können die Gewichte durch einen Test auf Basis einer Bibliothek mit Referenzpositionen "kalibriert" werden. Prüfkriterien können dabei sowohl die Approximation des Minimax-Wertes¹⁸¹, das Auffinden des insgesamt besten Zuges als auch das Auffinden des besten Zuges aus einer vorgegebenen Liste von Zügen sein (Comparison Training). Alle solche Methoden, die auf bereits vorhandenem Wissen aufbauen, werden als Supervised Learning bezeichnet.
- Bereits in den 1950er Jahren beschrieb Arthur Samuel für sein Dame-Programm einen Lernprozess, bei dem Programmversionen mit unterschiedlichen Gewichten gegeneinander spielen. Möglich ist natürlich auch ein Turnier gegen andere, bereits etablierte Spielprogramme oder gegen gute Spieler. Dieses Vorgehen, das aufgrund seines empirischen Charakters eine gewisse Verwandtschaft mit der Monte-Carlo-Methode besitzt, zählt zu den Methoden des so genannten Verstärkungslernens, für das meist der englische Begriff Reinforcement Learning verwendet wird. Diese Methoden sind für Szenarien konzipiert, bei denen das lernende Computerprogramm über einen Erfolg oder Misserfolg nicht unmittelbar nach einer einzelnen (Zug-)Entscheidung informiert wird, sondern nur global, das heißt bei Spielen in der Regel erst am Ende einer konkret gespielten Partie. Dieses Ergebnis muss dann mit den Schätzwerten, die das zu optimierende Computerprogramm im Verlauf der Partie bei seinen Zugentscheidungen berechnet hat, verglichen werden, um so die Gewichte der zugrundeliegenden Schätzfunktion zu verbessern.

Ein konkretes Verfahren des Reinforcement Learning ist das so genannte **Temporal Difference Learning**, welches erstmals 1988 durch Sutton und Barto beschrieben wurde. Bei Spielen wird dabei zur Folge der Positionen, bei denen der Computer gezogen hat, die zugehörige Sequenz der auf Basis der aktuellen Gewichte berechneten Werte v_0 , v_1 , v_2 , ... betrachtet – und zwar entweder die Schätzwerte selbst oder die daraus in einer be-

¹⁸⁰ Eine bemerkenswerte Ausnahme ist die Verwendung eines neuronalen Netzwerks, einem mathematischen Modell für mehrstufig miteinander verknüpfte Gehirnzellen. Neuronale Netze eignen sich – etwa im Rahmen einer Mustererkennung – dazu, durch das Setzen, das heißt "Erlernen", der internen Parameter aus bestimmten Eingangswerten gewünschte Ausgangswerte zu generieren. Im Bereich eines Spielprogrammes erfolgte der erste erfolgreiche Einsatz 1989 im Rahmen eines Backgammon-Programmes.

¹⁸¹ Bei Othello wurden dazu mit Brute-Force-Methoden berechnete Minimax-Werte zu Positionen mit mindestens 48 belegten Feldern verwendet. Möglich ist aber auch die Verwendung von Datenbanken mit Partien von guten Spielern.

schränkten Baumsuche berechneten Minimax-Werte. Im Fall eines beidseitig optimalen Spiels – und gegebenenfalls eines jeweils "ausgewogen" wirkenden Zufalls – wären die richtigen Positionswerte alle gleich, wobei es plausibel ist, dass die Approximationen zum Ende der Partie tendenziell besser sind. Insofern bieten sich die temporalen Differenzen $d_t = v_{t+1} - v_t$ als Vorgaben dafür an, wie die Approximationswerte mittels einer Modifikation der Gewichte tendenziell zu verändern sind.

Für die konkrete Realisierung der Gewichte-Anpassung in Spielprogrammen wurden auf Basis einer Grundformel für das Temporal-Difference-Verfahren verschiedene Varianten vorgeschlagen und für diverse Spiele untersucht. Dabei ist innerhalb der Anpassungformel für die Gewichte sowohl die Lernrate als auch die Dämpfung bei der Wirkung auf länger zurückliegende Positionen durch Parameter steuerbar. Organisatorisch hat es sich bewährt, die Gewichte erst am Ende einer Partie – und nicht bereits nach jeder Zugentscheidung – zu verändern.

Ausgehend von den krassen Misserfolgen im Computer-Go, die sich für alle bisher beschriebenen Ansätze ergaben, wurden für Go ab 2006 gänzlich neue Techniken entwickelt¹⁸², die in grundlegenden Ideen allerdings bereits 1990 von Abramson und 1993 von Bernd Brügmann vom Max-Planck-Institut für Physik in München skizziert worden waren: Bei der so genannten **Monte-Carlo-Baumsuche** wird der Wert einer Position am Ende einer durchsuchten Variante Monte-Carlo-mäßig dadurch abgeschätzt, dass ausgehend von dieser Position genügend viele Partien mit beidseitig zufälliger Zugauswahl gespielt werden. Im Detail lässt sich dieser algorithmische Ansatz, für den außer den Spielregeln kein Wissen über das Spiel erforderlich ist, in verschiedenster Weise variieren:

- Für den eigentlichen Minimax-Prozess reicht bereits die Suchtiefe 1. Das heißt, es werden die Monte-Carlo-Schätzwerte von denjenigen Positionen miteinander verglichen, die unmittelbar nach dem aktuell zu entscheidenden Zug entstehen. Der Zug, der zur Position mit dem höchsten Monte-Carlo-Schätzwert führt, wird schließlich ausgewählt.
- Spätere Zugentscheidungen werden meist zufällig gefällt, nämlich genan dann, wenn eine Position im Rahmen der aktuellen Monte-Carlo-Schätzung das erste Mal erreicht wird. Ab dem zweiten Erreichen einer Position findet die Zugauswahl "intelligent" statt, wobei das Ziel verfolgt wird, sowohl gute als auch vielversprechende Züge zu berücksichtigten. Dazu wird jeweils das während der Monte-Carlo-Schätzung bereits erzielte Wissen bestmöglich genutzt, wozu sich das Spielprogramm zu jeder durchlaufenen Position die Zahl der Durchläufe und die in diesen Partien erzielte Gewinnsumme merkt. Wie gerade schon erwähnt versucht das Programm auf Basis dieser Daten bei der Zugauswahl sowohl gute als auch vielversprechende Züge zu berücksichtigen, wobei mit diesen beiden Kategorien einerseits Züge gemeint sind, die in vorangegangen Partien im Durchschnitt gute Ergebnisse geliefert haben, und andererseits solche, die aufgrund ihrer bisher vergleichsweise seltenen Auswahl oder der bisherigen Gewinnsumme nicht als hoffungslos einzustufen sind. Bei der Abwägung zwischen den beiden Zugkategorien bewährt hat sich der so genannte UCT-

¹⁸² G.M.J.-B. Chaslot, M. H. M. Winands, J.W.H.M. Uiterwijk, H. J. van den Herik, and B. Bouzy, Progressive strategies for Monte-Carlo tree search, New Mathematics and Natural Computation, 4(3), 2008, S. 343-357

2.11 Gewinnaussichten – immer berechenbar?

Zwei Mathematiker spielen das folgende Spiel: Gezogen wird abwechselnd, wobei sich eine Partie stets über fünf Züge erstreckt. Für jeden Zug denkt sich der betreffende Spieler eine beliebige, nicht negative, ganze Zahl aus und gibt sie seinem Gegner bekannt. Nach fünf Zügen mit den dabei ausgewählten Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gewinnt der erste Spieler genau dann, wenn

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3x_5 - 2x_3 - 2x_5 - 3 = 0$$

ist. Welcher Spieler besitzt eine Gewinnstrategie?

¹⁸³ Beim "normalen" Upper-Confidence-Bounds-Algorithmus (UCB) handelt es sich um ein Entscheidungsverfahren, welches das folgende Problem annähernd optimal löst: Gegeben sind n Zufallsgrößen X₁, X₂, ..., X_n mit unbekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen, von denen der Spieler Runde für Runde jeweils eine auswählen kann, um so auf Dauer eine möglichst hohe Summe zu "erwürfeln". Konkret ist es also das Ziel des Spielers, seine Auswahlentscheidung jeweils abhängig von seinem Vorwissen, das die "Würfel"-Ergebnisse der bereits gespielten Runden umfasst, zu optimieren.

Das Szenario wird häufig mit einer Slot Machine beschrieben, die abweichend vom Standard des "Einarmigen Banditen" n Betätigungshebel zur Auswahl n verschiedener, nicht näher bekannter Gewinnspiele besitzt (**Multi Armed Bandit Problem**).

Dass es sich bei den beiden Spielern um Mathematiker handelt, ist für die Gewinnaussichten des Spiels sicherlich ohne Belang – wer aber sonst würde ein so eigenartiges Spiel spielen? Natürlich dient das Spiel überhaupt nicht dem Zweck, wirklich – und sei es von Mathematikern – gespielt zu werden. So nutzen wir es auch mehr zur Vorbereitung auf das nächste Kapitel, in dem es dann garantiert wieder um "richtige" Spiele geht.

Bei der etwas merkwürdigen Formel fällt zunächst auf, dass die Zahl x_4 überhaupt nicht gebraucht wird. Außerdem erkennt man, dass sich die Gleichung zu

$$(x_1 + x_2)^2 + 1 = (x_3 + 2)(x_5 + 2)$$

umformen lässt. In dieser Form wird nun ersichtlich, wie die beiden Spieler strategisch vorgehen sollten. Der erste Spieler kann genau dann gewinnen, wenn die beiden ersten Züge einen Wert $(x_1 + x_2)^2 + 1$ hervorgebracht haben, der keine Primzahl ist. Denn dann und nur dann kann der erste Spieler seine beiden Zahlen x_3 und x_5 auf der Basis einer Produkt-Zerlegung so wählen, dass die Gleichung erfüllt ist. Um sicher zu gewinnen, muss der zweite Spieler also versuchen, seine Zahl x_2 so zu wählen, dass $(x_1 + x_2)^2 + 1$ eine Primzahl ist. Unabhängig von dem Eröffnungszug x_1 seines Gegners ist ihm das aber nur dann möglich, wenn es unendlich viele Primzahlen der Form $n^2 + 1$ gibt – ob dies der Fall ist, muss aber hier offen bleiben, da es sich um ein bisher ungelöstes Problem handelt 184. Sollte es nur endlich viele Primzahlen der genannten Form geben, braucht der erste Spieler seine erste Zahl x_1 nur entsprechend groß genug wählen, um sicher zu gewinnen.

Fassen wir das Ergebnis zusammen: Zwar hat einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie, allerdings wissen wir nicht, wer das ist!

Das beschriebene Spiel stammt von James Jones, der zugleich noch eine Klasse ähnlicher, weit bemerkenswerterer Spiele konstruierte¹⁸⁵. Wieder wählen die beiden Spieler abwechselnd Zahlen aus, diesmal im Verlauf von 17 Zügen. Der erste Spieler gewinnt, wenn der Ausdruck

$$\{n + x_5 + 1 - x_4\} \{ \langle (x_5 + x_7)^2 + 3x_7 + x_5 - 2x_4 \rangle^2 + \langle [(x_{12} - x_7)^2 + (x_{14} - x_{11})^2] [(x_{12} - x_5)^2 + (x_{14} - x_9)^2 ((x_4 - n)^2 + (x_{14} - x_{11} - n)^2)]$$

$$[(x_{12} - 3x_4)^2 + (x_{14} - x_9 - x_{11})^2] [(x_{12} - 3x_4 - 1)^2 + (x_{14} - x_9x_{11})^2] - x_{15} - 1 \rangle^2$$

$$\langle [x_{14} + x_{15} + x_{15}x_{12}x_3 - x_1]^2 + [x_{14} + x_{17} - x_{12}x_3]^2 \rangle \}$$

gleich 0 ist. Der im Ausdruck enthaltene Parameter n wird nicht durch die Spieler gewählt, sondern ist Bestandteil der Spielergel. Das heißt, zu jedem Wert n=0,1,2,... gehört ein Spiel. Die Frage lautet natürlich: Für welche der Spiele hat der erste Spieler eine Gewinnstrategie und für welche der zweite 186 ? Zu überlegen ist also, wie die Gewinnaussichten des zu einem Parameter n gehörenden Spiel bestimmt werden können.

¹⁸⁴ Siehe Paulo Ribenboim, *The book of prime number records*, New York 1988, S. 322 (6. III. A. Conjecture E). Für die Anzahl solcher Primzahlen bis zu einer bestimmten Größe gibt es eine Näherungsformel, die sich experimentell und auf der Ebene von probabilistischen Plausibilitätsbetrachtungen begründen lässt. Die Formel ist zwar ein Indiz dafür, dass es unendlich viele Primzahlen der Form n² + 1 gibt, ein Beweis ist sie aber nicht.

¹⁸⁵ J. P. Jones, Some undecidable determined games, International Journal of Game Theory, <u>11</u> (1982), S. 63-70.

¹⁸⁶ Die Existenz von Gewinnstrategien ist gesichert, obwohl eine Voraussetzung von Zermelos Be-

Dass ein normales Minimax-Verfahren kaum angewendet werden kann, ist nahe liegend. Schließlich gibt es für jeden Zug unendlich viele Möglichkeiten, was bereits beim eingangs diskutierten Spiel für Schwierigkeiten sorgte. Wie lange soll nach einem guten Zug gesucht werden? Kann eine erfolglos gebliebene Suche irgendwann abgebrochen werden, weil sowieso kein Gewinnzug mehr gefunden werden kann? Oder auf welche andere Weise lassen sich die beidseitig unendlich vielen Zugmöglichkeiten durch eine endliche Zahl von Rechenschritten bewerten?

Es kommt schlimmer, als man es sich vielleicht vorstellen mag: Das Problem ist nämlich unentscheidbar, das heißt, es lässt sich nachweisen, dass es keinen Algorithmus gibt, der für jedes der Spiele dieser Klasse die Gewinnaussichten bestimmt! Ein Computer wird nie so programmiert werden können, dass er zu jedem Wert n die Gewinnaussichten des zugehörigen Spiels berechnet. Kein noch so kreativer Mathematiker wird je eine allgemeine Lösung beweisen können, welche Spiele vom ersten Spieler und welche vom zweiten sicher gewinnbar sind.

Wie sind solche, im ersten Moment zweifellos erstaunliche, wenn nicht sogar unglaubliche Aussagen zu erklären? Um sie zu verstehen, bedarf es einiger Kenntnisse über die Grundlagen und Denkweisen der theoretischen Informatik und der mathematischen Logik, bei deren Studium man oft an die Grenzen der menschlichen Vorstellungskraft stößt, vielleicht auch ein Grund dafür, dass ein so umfangreiches wie anspruchsvolles Buch wie *Gödel, Escher, Bach*¹⁸⁷, das sich mit solchen Themen beschäftigt, zu Beginn der 1980er Jahre zum Bestseller werden konnte.

Wir beginnen unseren Exkurs zu den Grundlagen der theoretischen Informatik und der mathematischen Logik mit dem Begriff der **Berechenbarkeit**: Noch vor der technischen Realisierung universeller, das heißt frei programmierbarer, Rechenmaschinen wurden Mitte der 1930er Jahre verschiedene Ansätze gemacht, Berechenbarkeit formal zu definieren. Natürlich sollte eine solche Definition im Einklang stehen mit der bestehenden Anschauung und Erfahrung über Berechenbarkeit. Einzuschließen sind daher beispielsweise arithmetische Operationen und Rechenverfahren. Eine sehr suggestive Definition stammt von Alan Turing und basiert auf einem gedanklichen Modell eines primitiv anmutenden, aber bereits universell programmierbaren Rechners, später Turing-Maschine genannt 188. Andere Ansätze waren rein arithmetisch, stellten sich ebenso wie noch andere Definitionsversuche allesamt als äquivalent zu Turings Definition heraus. 1936 formulierte daher Alonzo Church (1903-1995) die später nach ihm benannte These, gemäß der alles, was im intuitiven Sinne berechenbar ist, bereits mit einer Turing-Maschine berechnet werden kann. Für unsere informellen Überlegungen können wir daher die folgende Vereinbarung zugrunde legen:

Berechenbar ist alles das, wozu ein heute üblicher, das heißt vollkommen deterministisch arbeitender Computer entsprechend programmiert werden kann. Dabei beschränken wir uns auf solche Programme, die ausgehend von einem Input einen einzigen Output liefern. Abweichend von der technischen Praxis wird der Arbeitsspeicher als unbegrenzt groß

stimmtheitssatz, nämlich die Endlichkeit der zur Auswahl stehenden Zugmöglichkeiten, nicht erfüllt ist.

¹⁸⁷ Doulgas R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach, Stuttgart 1985 (amerikan. Orig. 1979).

¹⁸⁸ Alan M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society, (2) <u>42</u> (1936), S. 230-265, (2) <u>43</u> (1937), S. 544-546.

angenommen.

Auch wenn die Bezeichnung "berechenbar" einen engen Bezug zu Zahlen nahe legt, so ist der Begriff keineswegs darauf beschränkt. Gegenstand der Berechnungen können beispielsweise auch Texte und Spielpositionen sein. Bezogen auf den Komfort der Programmierung ist es, wie bereits im letzten Kapitel geschehen, auch beim Arbeiten an unserem fiktiven Modellcomputer wieder empfehlenswert, mit höheren Programmiersprachen zu arbeiten¹⁸⁹. Das heißt, mit Hilfe von Systemprogrammen wie einem Interpreter oder Compiler werden die Hochsprachen-Programme in Folgen von Maschinenbefehlen übersetzt und anschließend bearbeitet, wobei es sich bei der Übersetzung um nichts anderes handelt als um eine spezielle Berechnung in Form einer Texttransformation. Insgesamt wird dadurch ein Compiler zu einem universellen Programm, das bei entsprechendem Input, nämlich einem Programm der entsprechenden Programmiersprache, jede beliebige Berechnung durchführen kann.

Verweilen wir noch etwas beim Thema Compiler: Bekanntlich findet ein Compiler während der Übersetzung syntaktische Fehler, also Verstöße des eingegebenen Programmes gegen die Regeln der verwendeten Programmiersprache. Allerdings muss, wie es wohl schon jeder Programmierer leidvoll selbst erfahren hat, ein erfolgreich compiliertes Programm keineswegs einwandfrei arbeiten. So kann das Programm aufgrund eines Konzeptionsfehlers etwas anderes berechnen als es eigentlich soll. Es kann sogar noch schlimmer kommen: Ohne je zu stoppen, verliert sich das Programm in einer Endlos-Schleife.

Äußerst praktisch wäre es daher, wenn bereits der Compiler so verbessert werden könnte, dass er Endlos-Schleifen automatisch erkennt. Für einfache Fälle wie das folgende Beispiel erscheint das nicht schwierig:

```
N = 1
WHILE N > 0
N = N + 1
WEND
```

Wie sieht es aber beim nächsten Programm aus, dessen Programmverlauf von einer zu Beginn eingegebenen Ganzzahl N abhängt?

```
INPUT N WHILE N <> 1 IF (N MOD 2) = 0 THEN N = N/2 ELSE N = 3 * N + 1 WEND
```

Für welche Eingabewerte N stoppt das Programm, für welche nicht? Über diese konkrete Frage hinaus ist es natürlich viel interessanter, die allgemeine Problemstellung, das sogenannte **Halteproblem**, zu untersuchen. Kann für ein zusammen mit seinem Input vorliegendes Programm entschieden werden, und wenn ja wie, ob es irgendwann stoppt? Das heißt, kann diese Prüfung mit einem Computerprogramm erfolgen, das immer nach endlicher Zeit zu einem eindeutigen Ergebnis kommt?

¹⁸⁹ Eine Reduzierung PASCAL-ähnlicher Programmiersprachen auf einen universellen, den Programmen von Turing-Maschinen entsprechenden Minimalumfang wird in Jürgen Albert, Thomas Ottmann, Automaten, Sprachen und Maschinen für Anwender, Zürich 1983, S. 274 ff. beschrieben.

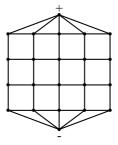
2.12 Spiele und Komplexität: Wenn Berechnungen zu lange dauern

Gibt es für das Spiel Hex, ähnlich wie es für viele Nim-Varianten der Fall ist, eine "Formel", mit der die Gewinnaussichten schnell berechenbar sind?

Das Border-to-Border-Spiel Hex haben wir bereits in Kapitel 2.2 vorgestellt und erörtert (siehe dort u.a. Bild 12). Seine Positionen sind durch zwei Teilmengen von Feldern charakterisiert, welche die mit weißen beziehungsweise schwarzen Steinen belegten Felder enthalten. Die Gesamtheit aller Positionen ist also relativ übersichtlich strukturiert, und es erscheint daher durchaus denkbar, wie beim Nim einfache Gewinnkriterien finden zu können. Im Fall des zu Hex sehr ähnlichen Spieles Bridge-it, das wir ebenfalls im Kapitel 2.2 bereits kennen gelernt haben (siehe dort u.a. Bild 14), ist dies tatsächlich möglich, wie Alfred Lehman 1964 zeigte (siehe Kasten *Bridge-it und Shannons Switching-Game*).

Bridge-it und Shannons Switching Game

Um die Gewinnaussichten einer Bridge-it-Position mit einem einfachen Verfahren bestimmen zu können, verallgemeinerte Lehman das Spiel Bridge-it¹⁹³. Gegenstand seiner verallgemeinerten Version mit dem Namen Shannons Switching Game ist ein Graph. Ein solcher Graph umfasst eine Menge von Knoten und eine Menge von Kanten, wobei zu jeder Kante zwei nicht unbedingt verschiedene Knoten gehören. Bildlich kann man sich die Knoten als Punkte vorstellen, die zum Teil, gegebenenfalls auch mehrfach, durch richtungslose Wege, eben durch die Kanten, miteinander verbunden sind. Eine Kante kann durchaus auch einen Knoten mit sich selbst verbinden. Im Falle der von Lehman für sein Spiel untersuchten Graphen sind zwei Knoten besonders bezeichnet, nämlich mit "+" und "-". Zum Beispiel entspricht die Ausgangsposition des 5×5-Bridge-it dem abgebildeten Graphen.



Die Spieler Weiß und Schwarz ziehen nun abwechselnd, wobei der ziehende Spieler jeweils eine Kante auswählt, die in den vorangegangenen Zügen noch nicht ausgewählt wurde. Ein Zug von Weiß besteht darin, die ausgewählte Kante "auszuradieren", das heißt aus der Kantenmenge zu entfernen. Schwarz hingegen markiert die Kante schwarz, womit sie für Weiß unauslöschbar wird. Will man die neu entstandene Position wieder durch einen Graph darstellen, fasst man die beiden Knoten der von Schwarz gewählten Kante zu einem Knoten zusammen. Die nächste Abbildung zeigt eine Bridge-it-Position

¹⁹³ Alfred Lehman, *A solution of the Shannon switching game*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM Journal), <u>12</u> (1964), S. 687-735.

des anderen Baumes auswählen, und zwar so, dass der zerstückelte Baum wieder zusammengefügt wird¹⁹⁴.

Gegenüber der umfangreichen Analyse langer Zugvarianten ist Lehmans Kriterium deutlich einfacher anzuwenden. Insbesondere kann die Bestätigung, dass zwei vorgelegte Bäume die geforderten Eigenschaften erfüllen, sofort erfolgen. Aber auch für die Suche nach solchen Bäumen sind relativ schnell arbeitende Algorithmen bekannt¹⁹⁵. Lehmans Kriterium kann auch für die Positionen der anderen beiden Klassen modifiziert werden^{XLV}.

Zum Ende seiner Untersuchung über Bridge-it und verwandte Spiele gab Lehman einen Ausblick auf das Hex, für das er seine Technik nicht verallgemeinern konnte. Dass das Misslingen einer Verallgemeinerung kein Unvermögen war, zeigte 1979 Stefan Reisch von der Universität Bielefeld in seiner äußerst bemerkenswerten Diplomarbeit *Die Komplexität der Brettspiele Gobang und Hex*¹⁹⁶. Reisch bewies darin, dass jedes allgemeine Verfahren zur Bestimmung der Gewinnaussichten von Hex-Positionen bei großen Spielbrettern jeden noch praktikablen Rechenaufwand übersteigen dürfte. Die dazu verwendete Argumentation stützt sich auf eine zwar unbewiesene, aber weithin als richtig akzeptierte Vermutung.

Wie sind solche Aussagen möglich und was genau hat Reisch bewiesen? Wie im letzten Kapitel müssen wir dazu zunächst einen Exkurs in die theoretische Informatik machen, und zwar diesmal in die so genannte Komplexitätstheorie. Ging es im letzten Kapitel noch darum, die prinzipielle Grenze algorithmischer Berechnungen aufzuzeigen, wird nun versucht, den minimal notwendigen Aufwand zu charakterisieren, mit dem ein Problem garantiert gelöst werden kann.

Beginnen wir mit einfachen Beispielen: Sollen zwei ganze Zahlen in Dezimaldarstellung addiert oder multipliziert werden, dann gibt es dafür wohlbekannte Rechenverfahren. Dabei ist die Addition offensichtlich einfacher als die Multiplikation: Für die Summe von zwei nziffrigen Zahlen sind n Ziffernpaare zu addieren; durch die Überträge kann sich der Aufwand noch verdoppeln. Beim üblichen Multiplikationsverfahren werden bei zwei n-ziffrigen Zahlen zunächst n² Ziffernmultiplikationen durchgeführt, deren Resultate anschließend in geeigneter Zusammenstellung einschließlich entstehender Überträge addiert werden. Bei sehr großen Zahlen, die eine entsprechend lange Zifferndarstellung aufweisen, wächst der Aufwand bei der Addition also langsamer als bei der Multiplikation. Bezogen auf die Länge des Inputs, also die Gesamtlänge beider Zifferndarstellungen, steigt der Aufwand bei der Addition nämlich proportional, beim üblichen Multiplikationsverfahren hingegen im Wesentlichen quadratisch. Solche Tendenzen, wie der Rechenaufwand und damit die Rechenzeit eines entsprechend programmierten Computers wächst, sind ein gutes Maß dafür, wie komplex ein

.

¹⁹⁴ Der umgekehrte Teil von Lehmans Beweis, der zeigt, dass jede Gewinnstrategie für Schwarz als Nachziehenden die Existenz von zwei Bäumen mit den genannten Eigenschaften impliziert, ist weit anspruchsvoller.

¹⁹⁵ Harold M. Gabow, Herbert H. Westermann, *Forests, frames and games: algorithms for matroid sums and applications*, Algorithmica, <u>7</u> (1992), S. 465-497.

¹⁹⁶ Die Ergebnisse wurden später in Fachzeitschriften publiziert: Stefan Reisch, Gobang ist PSPACE-vollständig, Acta Informatica, <u>13</u> (1980), S. 59-66; Stefan Reisch, Hex ist PSPACE-vollständig, Acta Informatica, <u>15</u> (1981), S. 167-191. Das dort Gobang genannte Spiel wird sonst meist als Go-Moku bezeichnet – der Name Gobang steht dann für die Variante, bei der Steine unter Umständen auch geschlagen werden dürfen.

Algorithmus ist. Insbesondere sind solche tendenziellen Aussagen unabhängig von der gewählten Codierung. So gelten die Wachstumstendenzen ebenso für die entsprechenden Verfahren bei anderen Zahlendarstellungen, etwa beim Binärsystem oder bei 2-Byte- beziehungsweise 4-Byte-Darstellungen, wie sie Computer für ihre internen Operationen verwenden

Der Ansatz, die **Komplexität** eines Rechenverfahrens dadurch zu beschreiben, dass man die tendenzielle Steigerung des Rechenaufwandes bei immer länger werdenden Inputs zugrundelegt, ist universell verwendbar. Insbesondere kann so die Effizienz verschiedener Algorithmen miteinander verglichen werden. So ist beispielsweise das übliche Multiplikationsverfahren für sehr große Zahlen mit hunderten oder noch mehr Dezimalstellen alles andere als optimal. Dessen Aufwand von O(n²), was für eine im Vergleich zum Gesamtinput von n Zeichen quadratisch wachsende Obergrenze von Rechenschritten steht, kann nämlich mit einer einfachen Idee auf O(n¹,585) reduziert werden XLVI.

In der Praxis ist es oft völlig ausreichend, ein Verfahren zu verwenden, das im Durchschnitt schnell arbeitet, weil es in den meisten, aber nicht unbedingt in allen Fällen effizient arbeitet. Höhere Anforderungen ergeben sich allerdings dann, wenn Resultate unter Echtzeit-Bedingungen gefordert sind, etwa bei einer zu chiffrierenden Datenübertragung, der Steuerung einer Produktionsanlage oder der Analyse einer Spielposition unter Turnierbedingungen. In solchen Fällen ist es erforderlich, Probleme in einer vorgegebenen Zeit garantiert zu lösen. Im Hinblick auf derart absolute Anforderungen wird in der Komplexitätstheorie – analog zum Minimax-Ansatz der Spieltheorie – meist das worst-case-Prinzip zugrundegelegt, das heißt, Maßstab für den Rechenaufwand ist immer der denkbar ungünstigste Eingabewert einer bestimmten Länge. Dabei folgt die Klassifizierung einem recht groben Raster: Algorithmen, deren Rechenzeiten durch Polynome O(n), O(n²), O(n³), ... beschränkt werden, gelten als effizient, das heißt, sie werden als im Prinzip praktikabel angesehen, selbst wenn dies bei Schranken von O(n¹⁰⁰⁰) mehr als fraglich erscheinen muss. Dagegen gelten worst-case-Rechenzeiten ohne polynomiale Schranke, etwa weil sie mit der Tendenz 2ⁿ schnell astronomische Größenordnungen erreichen, für lange Inputs als unpraktikabel^{XLVII}

Das tendenzielle Wachstum des Rechenaufwands, den ein Verfahren verursacht, gestattet es insbesondere auch, die Auswirkungen des technischen Fortschritts zu prognostizieren. So konnte in der letzten Zeit die Rechengeschwindigkeit alle ein bis zwei Jahre verdoppelt werden. Die Anwendbarkeit eines Verfahrens vom Typ O(n) erweitert sich dabei jeweils auf Inputs mit doppelter Länge, während bei quadratisch wachsendem Aufwand gleichzeitig immerhin noch eine Steigerung der Inputlänge um 41%, nämlich im Verhältnis $\sqrt{2}$: 1, möglich wird. Bei exponentiell wachsendem Rechenaufwand wird dagegen nur eine Verlängerung um eine feste Anzahl von Stellen erreicht.

Statt einzelner Verfahren können auch Problemstellungen untersucht werden. Diese lassen sich komplexitätsmäßig dadurch charakterisieren, dass man von dem Verfahren ausgeht, das bei langen Inputs den schnellsten Erfolg garantiert – in der Praxis kein einfaches Unterfangen, da natürlich selbst noch nicht entdeckte Algorithmen mit einbezogen werden müssen. Überwindet man diese Hürde, erhält man ein Maß dafür, wie schwierig ein Problem zu lösen ist. Damit lassen sich beispielsweise die Schwierigkeiten von Spielen wie Nim, Bridgeit und Hex untereinander vergleichen: Welcher Rechenaufwand ist bei einem solchen Spiel im Vergleich zur Inputlänge, das heißt der Länge einer Positions-Codierung, mindestens er-

forderlich, um damit garantiert die Gewinnaussichten einer beliebig vorgegebenen Position zu bestimmen?

- Sehr einfach ist das Standard-Nim. Bezogen auf eine zahlenmäßige Codierung der Positionen hat es eine Komplexität von höchstens O(n). Gleiches gilt für Nim-Varianten, deren Grundy-Werte periodisch sind oder periodisch anwachsen. In diesen Fällen können nämlich die Grundy-Werte mit linearem Aufwand berechnet werden. Für die anschließende Nim-Addition gilt das ohnehin.
- Schon etwas schwieriger ist Brigde-it. Dank Lehmans Kriterium und entsprechender Algorithmen für Graphen sind die Gewinnaussichten von Brigde-it-Positionen mit einem noch nicht einmal quadratisch wachsenden Rechenaufwand berechenbar. Daher bereiten selbst relativ große Spielbretter keine großen Schwierigkeiten.
- Für Hex dagegen blieb ein einfaches Gewinnkriterium unauffindbar. Nimmt man lange Rechenzeiten in Kauf, kann man natürlich eine vollständige Minimax-Analyse durchführen. Dabei wird jede Zugvariante bestimmt durch die Reihenfolge, in der die Felder des Spielbrettes belegt werden abwechselnd mit weißen und schwarzen Steinen. Der Aufwand, diese Varianten alle zu untersuchen, ist aber immens: Im Vergleich zur Inputlänge wächst er bei großen Spielbrettern wie die Fakultät-Operation, also exponentiell. Immerhin muss die Analyse nicht am Speicherplatz scheitern. Dessen Bedarf ist nämlich vergleichsweise moderat, sofern man die Zugvarianten stets vorrangig in der Tiefe und erst anschließend in der Breite untersucht. Dann ist nämlich zu jedem Zeitpunkt der Analyse pro Zuglevel stets nur ein Zug zu speichern. Erst wenn alle aus einem Zug entstehenden Zugfolgen untersucht sind, wird auf dem betreffenden Level der nächste Zug generiert. Mit dieser tiefenorientierten Suche, die bei der praktischen Schachprogrammierung aufgrund von Laufzeit-Erwägungen etwa um die Züge im Hinblick auf Cutoffs umzusortieren kaum eingesetzt wird, kann der Speicherbedarf polynomial begrenzt werden.

Komplexitätstheorie: P - NP - PSPACE - EXPTIME

Jedes der vier aufgezählten Kürzel steht in der Komplexitätstheorie für eine Klasse von Entscheidunsproblemen. Die Beschränkung auf **Entscheidungsprobleme** verhindert, dass der für eine Aufgabe erforderliche Rechenaufwand einzig auf einer reinen Fleißaufgabe statt auf einer tatsächlichen Schwierigkeit beruht: Beispielsweise benötigt man, um zu einer eingegebenen Dezimalzahl eine entsprechende Anzahl von Einsen als Output zu erzeugen, einen Aufwand, der zur Outputlänge proportional ist. Bezogen auf die Inputlänge wächst dieser Aufwand also exponentiell, obwohl die Aufgabe eigentlich nicht sehr anspruchsvoll ist.

Übrigens wird der Anwendungsbereich durch die Beschränkung auf Entscheidungsprobleme nicht so stark eingeengt, wie man vielleicht zunächst meint. Insbesondere korrespondiert jede Optimierungsaufgabe mit einer Klasse von Entscheidungen, bei denen man jeweils danach fragt, ob eine bestimmte, vorgegebene Ober- oder Untergrenze erreichbar ist oder nicht.

Die vier Klassen von Entscheidungsproblemen sind folgendermaßen abgegrenzt:

 Die Klasse P enthält alle mit polynomial beschränktem Rechenaufwand zur Inputlänge berechenbaren Entscheidungen. Bezogen auf die Bestimmung von Gewinnaussichten gehören Nim und Bridge-it dazu.

- Die Klasse NP umfasst solche Entscheidungsprobleme, zu denen es ein effizientes Verfahren gibt, mit dem jede "Ja"-Entscheidung stets mit Hilfe einer geeigneten Zusatzinformation bestätigt werden kann. So lässt sich die Aussage, dass eine Zahl zusammengesetzt ist, schnell dadurch bestätigen, dass man einen Teiler angibt und anschließend eine einzige Division durchführt^{XLVIII}.
 - Zur Klasse NP gehören viele kombinatorische Probleme, für die effiziente Lösungsverfahren unbekannt sind. Das wohl bekannteste ist das Travelling-Salesman-Problem, bei dem für einen Handlungsreisenden eine möglichst kurze Route gesucht wird, die ihn durch eine vorgegebene Auswahl von Städten führt. Im zugehörigen Entscheidungsproblem wird danach gefragt, ob eine vorgegebene Maximaldistanz eingehalten werden kann. Positive Entscheidungen können dabei einfach durch die Angabe einer Route bestätigt werden. Ohne Zusatzinformation kann man bei n Städten natürlich alle n! Reihenfolgen durchsuchen. Allerdings bedeutet das bei vielen Städten einen enormen, nicht polynomial beschränkten Aufwand.
- Die Klasse PSPACE beinhaltet sämtliche Entscheidungsprobleme, die bei unbeschränkter Rechenzeit mit einem Speicherbedarf lösbar sind, der im Vergleich zur Inputlänge polynomial begrenzt ist. Dazu gehören unter anderem die Fragestellungen nach den Gewinnaussichten von solchen Spielen, die wie Hex nach einer festen Anzahl von Zügen enden. Dazu wird die Minimax-Suche tiefenorientiert organisiert, so dass pro Zuglevel immer nur eine einzige Position gespeichert werden muss.
- Die Klasse **EXPTIME** umfasst schließlich alle solche Entscheidungsprobleme, die in exponentiell beschränkter Rechenzeit gelöst werden können.

Die vier genannten Komplexitätsklassen bilden eine abgestufte Hierarchie:

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$$

Die zweite Inklusion resultiert aus der Möglichkeit, alle denkbaren Inputs für die Zusatzinformation nacheinander zu prüfen. Da außerdem in der jeweils polynomial beschränkten Rechenzeit nur ein entsprechend begrenzter Speicher gelesen und beschrieben werden kann, muss die Klasse NP Teil der Klasse PSPACE sein. Die dritte Inklusion ist in
der exponentiell zur Speichergröße beschränkten Anzahl von internen Speicherzuständen
begründet.

Welche der Inklusionen echt sind, das heißt, welche Klassen wirklich mehr Entscheidungsprobleme enthalten als die nächst kleinere, ist ein weitgehend offenes Problem. Es wird aber vermutet, dass alle vier Klassen verschieden groß sind. Sicher ist nur, dass die Klasse EXPTIME Probleme enthält, die nicht zur Klasse P gehören.

Wie aufwändig ist es aber nun wirklich, bei Spielen wie Hex, Go-Moku, Go, Dame und Reversi die Gewinnaussichten zu berechnen? Das heißt, ausgehend von einer auf beliebige Spielbrettgrößen verallgemeinerten Variante eines dieser Spiele wird danach gefragt, welche Komplexität ein Verfahren mindestens besitzen muss, das unabhängig von der Spielbrettgröße für alle Positionen funktioniert. Lassen sich effiziente Algorithmen, also solche mit polynomial beschränkten Rechenzeiten, finden, mit denen die Gewinnaussichten einer beliebigen Position bestimmt werden können? Nein – so lautet die Antwort, selbst wenn sie bisher nicht für alle der genannten Spiele absolut lückenlos bewiesen wurde. Für die Spiele Hex,

2.13 Memory: Gutes Gedächtnis und Glück – sonst nichts?

Um beim Memory zu gewinnen, benötigt man ein gutes Gedächtnis und ebenso etwas Glück. Gibt es darüber hinaus noch strategische Spielfaktoren, mit denen man seine Gewinnchancen verbessern kann?

Memory gehört zu den weit verbreiteten Kinderspielen. Es ist immer wieder faszinierend, wie sich selbst Vorschulkinder gegen Erwachsene behaupten. Ihr Vorteil dürfte es sein, dass sie sich voll auf das Spiel konzentrieren – ganz anders ihre erwachsenen Mitspieler, die häufig meinen, das Spiel nebenbei bewältigen zu können.

In Deutschland erschien Memory erstmals 1959. Als Erfinder gilt Heinrich Hurter, der es in seiner Familie seit 1946 spielte. Allerdings gibt es auch andere Vorläufer, wie etwa das englische Kartenspiel Concentration, dessen Wurzeln sogar bis ins 19. Jahrhundert zurückverfolgt werden konnten²⁰⁴.

Memory wird meist mit einem speziellen Kartensatz gespielt. Die Karten sind auf der Vorderseite mit unterschiedlichen Motiven bedruckt, wobei jedes Motiv genau zweimal vorkommt. Die Anzahl der Mitspieler ist beliebig. Zu Beginn werden die Karten verdeckt, das heißt mit ihrer neutralen Rückseite nach oben, auf einen Tisch gelegt. Während des Spiels ziehen die Spieler reihum: Pro Zug deckt ein Spieler zunächst eine Karte auf, dann eine zweite, wobei alle Mitspieler die Karten sehen können. Handelt es sich um ein Kartenpaar, nimmt sich der Spieler das Paar und zieht erneut. Andernfalls legt er die Karten wieder so hin, wie er sie vorgefunden hat. Am Schluss gewinnt der Spieler, der die meisten Paare sammeln konnte.

Wir wollen uns hier auf das Zweipersonenspiel beschränken. Zunächst stellt sich die Frage, wie Memory überhaupt mathematisch behandelt werden kann. Wie berücksichtigt man die zufälligen Spieleinflüsse? Ist Memory ein Spiel mit perfekter Information? Glücklicherweise sind beide Fragen nicht allzu schwierig zu beantworten:

- Zufällige Spielelemente werden durch ihre Erwartungswerte charakterisiert. Das heißt, deckt ein Spieler eine ihm noch unbekannte Karte auf, so werden alle derart möglichen Spielvarianten mit ihrer Wahrscheinlichkeit und dem entsprechenden Spielresultat berücksichtigt. Der Gewinn oder Verlust eines Spielers ist die Anzahl der Paare, die er mehr beziehungsweise weniger erzielt hat als sein Gegner.
- Memory ist ein Spiel mit perfekter Information, da alle Spieler stets den gleichen Informationsstand haben. Dabei nehmen wir an, dass die Erinnerung beider Spieler fehlerfrei und lückenlos ist so wie es wäre, wenn einmal aufgedeckte Karten offen liegen bleiben würden.

²⁰⁴ Erwin Glonnegger, *Das Spiele-Buch*, München 1988, S. 106 f.



Bild 34 Weiß zieht: Welche Karte deckt er als zweite auf?

Auf dieser Basis lässt sich nun der Zermelo'sche Bestimmtheitssatz anwenden, das heißt, wir können für jede Spielposition die Gewinnerwartung mittels einer Minimax-Optimierung berechnen. Was aber soll überhaupt optimiert werden? Gibt es denn überhaupt unterschiedliche Strategien? Sehen wir uns dazu zunächst ein Beispiel an, bei dem drei mit "1", "2" beziehungsweise "3" gekennzeichnete Kartenpaare auf dem Tisch liegen, wovon bisher nur eine einzige Karte, nämlich eine Eins, bekannt ist. Der ziehende Spieler, wir nennen ihn wie bei Brettspielen einfach wieder Weiß, deckt zunächst eine ihm noch unbekannte Karte auf, so dass die in Bild 34 dargestelle Situation entsteht.

Was ist zu tun, das heißt, welche Karte sollte Weiß als zweite aufdecken? Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten:

- 1. Sicherlich ist es sehr nahe liegend, wenn Weiß eine weitere der vier noch unbekannten Karten aufdeckt:
 - Mit der Wahrscheinlichkeit von ¼ wird das Gegenstück zur bereits offenen Zwei getroffen, so dass Weiß einen Punkt erhält. Anschließend zieht er nochmals. Dabei kennt er genau eine der vier verbliebenen Karten.
 - Mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von ¼ deckt Weiß das Gegenstück zur schon lokalisierten Einser-Karte auf. Diese neue Information gibt dem Gegner Schwarz die Gelegenheit, zu Beginn des nächsten Zuges einen sicheren Punkt zu machen. Anschließend muss nun Schwarz in der Situation ziehen, in der er genau eine der vier restlichen Karten kennt.
 - Schließlich handelt es sich mit der Wahrscheinlichkeit von ½ bei der aufgedeckten Karte um eine der beiden Dreien. In diesem Fall kann Schwarz im nächsten Zug nacheinander alle drei Paare abräumen.

Da sich die Erwartungen in den ersten beiden Fällen aufheben, ergibt sich für Weiß bei dieser Zugvariante eine Gewinnerwartung von insgesamt

$$\frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$$
.

2. Als wenig konstruktiv muss es erscheinen, wenn Weiß die schon bekannte Einser-Karte nochmals aufdeckt. Allerdings ist dieser Zug für Weiß ein durchaus legitimes Mittel, um Schwarz keine zusätzliche Information zukommen zu lassen. Daher wollen wir uns nun ansehen, welche Spielchancen sich dabei im Detail ergeben. Ausgangspunkt für Schwarz im nachfolgenden Zug ist also die Spielsituation, bei der unter drei Kartenpaaren zwei verschiedene Einzelkarten bekannt sind:



Wir gehen zunächst davon aus, dass Schwarz seinen Zug dadurch beginnt, dass er eine der vier noch nicht bekannten Karten aufdeckt:

Gegenüber dem Kinderspiel "Mensch ärgere dich nicht" ist Backgammon aber weit komplexer: Da ist zunächst die größere Anzahl von Steinen, von denen pro Zug bis zu zwei gezogen werden, bei Paschs sogar bis zu vier. Damit erhält Backgammon über das Zufallsmoment hinaus einen ausgeprägt kombinatorischen Charakter, zumal die Interaktion zwischen den Spielern aufgrund der relativ wenigen Felder und der gegenläufigen Zugrichtung sehr stark ist. Wer also meint, er brauche nur genügend Glück, um im Backgammon zu gewinnen, der solle es versuchen – es wird ihm kaum gelingen.

Wie Schach wird auch Backgammon in internationalen Turnieren ausgetragen. Krönung des Turniergeschehens ist der Titel des Weltmeisters. Viel früher als beim Schach erwuchs allerdings die Konkurrenz durch Computer. So konnte bereits 1979 der damals amtierende Weltmeister Luigi Villa von einem von Hans Berliner konzipierten Computerprogramm mit 7:1 Punkten geschlagen werden²⁰⁷.

Die getragene Ruhe eines Schachturniers ist beim Backgammon kaum vorstellbar. Grund dafür sind die Würfel. Sie lassen keine Stille zu, sorgen zugleich für Bewegung und ein schnelles Spiel, denn es macht überhaupt keinen Sinn, eine Position zu genau zu untersuchen. Spielerisch gefragt ist mehr die Erkennung wesentlicher Muster und das realistische Einschätzen von Risiken. Mit Erfahrung und Intuition kann beides aber sehr schnell geschehen.

Eins der schönsten Elemente im Backgammon ist die Möglichkeit, den Einsatz zu verdoppeln. Angezeigt wird ein erhöhter Einsatz mit einem speziellen Würfel, dem so genannten Verdopplungswürfel, der auf seinen sechs Seiten mit den Einsatzstufen 2, 4, 8, 16, 32 und 64 beschriftet ist. Er ist eine Erfindung der 1920er Jahre und knüpft an die verbreitete Gepflogenheit an, Backgammon um Geld zu spielen. Dann – und ebenso beim Spiel um Turnierpunkte – macht es nämlich Sinn, den Einsatz verdoppeln zu können.

Damit ein im Vorteil stehender Spieler nicht laufend den Einsatz erhöht, darf kein Spieler den Einsatz zweimal hintereinander verdoppeln. Im praktischen Spiel wird das Recht zum nächsten Redoppel mit dem Verdopplungswürfel angezeigt: Nachdem ein Spieler als Erster gedoppelt hat, erhält sein Gegner, sofern er das Doppel annimmt, den Verdopplungswürfel auf seine Spielbrett-Seite hingelegt. Dabei liegt die aktuelle Einsatzstufe "2" oben auf. In der weiteren Partie darf nun immer nur derjenige Spieler redoppeln, auf dessen Seite der Verdopplungswürfel gerade liegt. Akzeptiert der Gegner das Redoppel, erhält nun er den Verdopplungswürfel, der dabei auf die nächsthöhere Stufe gedreht wird.

Zwar kann ein Spieler, dessen Doppel oder Redoppel angenommen wird, seinen positionellen Vorteil wertmäßig besser nutzen. Er verliert aber zugleich ein Stück strategisches Potential, nämlich die Option, erst zu einem späteren und vielleicht noch besser geeigneten Zeitpunkt den Einsatz zu verdoppeln. Besonders krass ist dieser Verlust an Initiative bei einem Redoppel: Kann ein Spieler redoppeln, verzichtet aber darauf, dann kann er aufgrund dieses Verzichts in aller Ruhe eine vielleicht noch günstigere Gelegenheit abwarten, während der Gegner, sollte sich das Blatt zu seinen Gunsten wenden, die Möglichkeit zum Redoppel sicher missen wird. Im Gegensatz dazu gewährt der Verzicht auf das erste Doppel keinen

²⁰⁷ Hans Berliner, Ein Computer spielt Backgammon, Spektrum der Wissenschaft, 1980/8, S. 53-59; Hans Berliner, BKG – A program that plays Backgammon, Computer Science Department, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1977; Hans Berliner, Backgammon computer program beats world champion, Artificial Intelligence, 14 (1980), S. 205-220. Nachdrucke der beiden zuletzt genannten Publikationen: David N. L. Levy, Computer games I, New York 1988, S. 3-28, S. 29-43.

Schutz davor, dass der Gegner nach einer Umkehr des Vorteils selbst doppelt. Insofern kann der Verzicht auf ein Redoppel mehr Vorteile bringen als der Verzicht auf das entsprechende Doppel. Folglich muss für ein Redoppel die aktuelle Position einen größeren Vorteil aufweisen, als es für ein Doppel erforderlich ist.

Warum selbst bei beidseitig fehlerfreiem Spiel durchaus Doppel und Redoppel angenommen werden können, sieht man sich am besten anhand eines einfachen Beispiels an. Dazu untersuchen wir die in Bild 38 abgebildete Position, bei der Weiß am Zug ist.

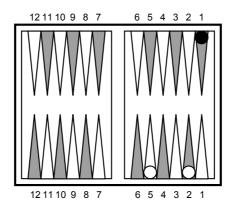


Bild 38 Reichen die Chancen von Weiß für ein Doppel?

Analysieren wir zunächst die Chancen der Spieler dafür, als Erster alle Steine ins eigene Ziel herauszuwürfeln:

- Weiß gewinnt im ersten Zug, wenn er eine der Kombinationen 2-2, 3-3, 4-4, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5 oder 6-6 würfelt²⁰⁸. Die Wahrscheinlichkeit, dass Weiß im ersten Zug gewinnt, beträgt also 19/36.
- Schafft es Weiß nicht, seine beiden Steine im ersten Zug herauszuwürfeln, dann gewinnt Schwarz im nächsten Zug. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 17/36.

Ohne Doppel kann daher Weiß einen Gewinn von $19/36 \cdot 1 + 17/36 \cdot (-1) = 1/18$ erwarten. Und mit Doppel? Sehen wir uns dazu zunächst an, wie sich Schwarz verhalten sollte:

- Lehnt Schwarz das Doppel ab, gewinnt Weiß den einfachen Einsatz.
- Nimmt Schwarz dagegen an, dann gewinnt Weiß durchschnittlich $1/18 \cdot 2 = 1/9$.

Schwarz tut also gut daran, das Doppel trotz seines positionellen Nachteils anzunehmen. Denn selbst nach einer Verdopplung ist der zu erwartende Verlust deutlich geringer als ein ganzer Einsatz, wie er bei einer Ablehnung verloren geht.

Offensichtlich ist das letzte Argument über die spezielle Situation hinaus bei jeder Verdopplung anwendbar: Ein Spieler, der eine Gewinnchance von mindestens ¼ besitzt, sollte keine Verdopplung ablehnen. Gegenüber dem sicheren Verlust des einfaches Einsatzes bedeutet es nämlich für ihn das geringere Übel, mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens ¾

²⁰⁸ Beim Backgammon macht es keinen Sinn, zwischen Würfen wie 1-2 und 2-1 zu unterschieden. Es wird daher immer nur eine der beiden Kombinationen aufgeführt, die andere ist aber stets ebenfalls gemeint.

2.15 Mastermind: Auf Nummer sicher

Wie lässt sich beim Mastermind der gesuchte Code am schnellsten knacken? Wie viele Züge reichen aus, um jeden beliebigen vierstelligen Sechs-Farben-Code sicher entschlüsseln zu können?

Das auch unter den Namen Superhirn vermarktete Spiel Mastermind gehört zu den erfolgreichsten Spielen der 1970er Jahre. In Anlehnung an ein in England verbreitetes Schreibspiel mit dem Namen "Bulls and Cows" wurde Mastermind 1973 von dem in Paris lebenden Israeli Marco Meirovitz erfunden. Damals konnten in nur wenigen Jahren über zehn Millionen Exemplare verkauft werden²¹⁸.

Mastermind ist ein Logikspiel für zwei Personen. Ein Spieler wählt zu Beginn einen Farbcode – es ist zugleich seine einzige aktive Entscheidung während der gesamten Partie. Kon-

$$0,603 + 0,1014 \cdot (p + 2a + a_1 - b)$$

Siehe dazu den in Fußnote 212 genannten Review-Artikel.

²¹⁶ Allerdings können sich anders als beim Jacoby-Paradoxon die beiden Positionen bezogen auf die Platzierung der weißen Steine unterscheiden; nur die Zugzahlerwartung muss übereinstimmen.

²¹⁷ Jim Gillogly fand mittels statistischer Analysen die folgende N\u00e4herungsformel f\u00fcr die Zugzahlerwartung:

²¹⁸ David Pritchard, Das große Familienbuch der Spiele, München 1983, S. 190 f..; Rüdiger Thiele, Das große Spielevergnügen, Leipzig 1984, S. 210; Erwin Glonnegger, Das Spiele-Buch, München 1988, S. 228. Praktische Spieltips vermittelt Leslie H. Ault, Das Mastermind-Handbuch, Ravensburg 1978 (amerikan. Orig. 1976).

kret setzt er eine vorgegebene Zahl von n Farbstiften hinter eine dafür vorgesehene Sichtblende. Zur Auswahl stehen k Farben, die durchaus mehrfach verwendet werden dürfen, so dass es insgesamt k^n zulässige Codes gibt. Bei den üblichen Varianten ist k=6 und n=4 beziehungsweise k=8 und n=5.

Der aktiv spielende Herausforderer versucht, mit möglichst wenigen Rateversuchen, bei denen er jeweils einen Code tippt, den verborgenen Code zu knacken. Dabei berücksichtigen kann er die Hinweise, die er vom passiven Codierer bei den vorherigen Versuchen erhalten hat. Zu jedem geratenen Code muss nämlich der Codierer zwei Daten über die Zahl der Treffer bekannt geben:

- Da ist zunächst die Anzahl der echten Treffer, das heißt die Zahl der Farbstifte, deren Farbe und Position korrekt ist. Für jeden echten Treffer setzt der Codierer eine schwarzen Antwortstift, wobei nicht ersichtlich wird, auf welche Farbstifte sich die bekannt gegebenen Trefferkennungen beziehen.
- Die zweite Zahl ist die Anzahl der Farbstifte, die erst nach einer geeigneten Permutation zusätzliche Treffer ergeben würden. Der Codierer zeigt diese Zahl dadurch an, dass er eine entsprechende Anzahl von weißen Anwortstiften setzt.

Auch in diesem Fall sagt ein Beispiel wie das in Bild 49 mehr als tausend Worte.

Beim Mastermind müssen logische Schlüsse mit höchster Präzision gezogen werden: Welche Farben kommen im unbekannten Code gesichert vor? Welche sogar mehrmals? Welche Farben können definitiv ausgeschlossen werden? Kann ein Farbstift bereits mit Gewissheit lokalisiert werden? Wie sollte im nächsten Versuch geraten werden, um möglichst viele neue Informationen zu erhalten? Nur mit Antworten auf solche Fragen kann die große Zahl der möglichen Codes überblickt werden, um ausgehend von einer Gesamtheit von $6^4 = 1296$ oder gar $8^5 = 32768$ Codes den gesuchten Code in nur wenigen Zügen zu entschlüsseln.

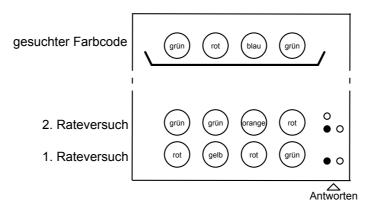


Bild 49 Die ersten zwei Rateversuche in einer Mastermind-Partie

Wir wollen nun versuchen, die Spielweise im Mastermind zu perfektionieren. Zuvor müssen wir jedoch sowohl die Randbedingungen als auch die zu optimierenden Kriterien festlegen. Sie sind eng damit verbunden, welcher Kategorie von Spielen man das Mastermind zuordnet: Handelt es sich spieltheoretisch um ein Ein- oder Zweipersonenspiel, und lässt sich Mastermind als ein Spiel mit perfekter Information auffassen? Drei völlig unterschiedliche Ansätze

sind denkbar. Übereinstimmend in allen drei Modellen ist die Gewinnfestlegung, bei der der Decodierer für jeden Zug eine Einheit an seinen Gegner entrichten muss:

- Im Sinne eines worst-case-Ansatzes kann man nach einer Strategie suchen, die in möglichst wenigen Zügen jeden beliebigen Code garantiert entschlüsselt. Dazu kann man sich etwa vorstellen, der Codierer dürfe mogeln und seinen Code während der Partie noch ändern, allerdings immer nur in Übereinstimmung mit bereits gegebenen Antworten. Das bedeutet, dass der Codierer jede Antwort frei wählen kann, so weit sie nicht zu den zuvor bereits gegebenen Antworten im Widerspruch steht. In dieser Interpretation erscheint Mastermind als zufallsfreies Zweipersonenspiel mit perfekter Information, dessen Minimax-Wert berechnet werden kann.
- Man kann Mastermind aber auch als Einpersonenspiel ansehen, bei dem der einzige Zug des Codierers durch eine Zufallsentscheidung ersetzt wird. Dabei ist es nahe liegend aber nicht zwingend, von gleichwahrscheinlichen Codes auszugehen. In Kenntnis der verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilung sucht anschließend der Herausforderer eine Strategie, bei der die zu erwartende Zuganzahl minimal ist. Es handelt sich um eine averagecase-Optimierung, die mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst werden kann. Minimax-Techniken spielen keine Rolle.
- Eine realistische Mastermind-Analyse darf anders als die ersten beiden Ansätze nicht die Rolle des Codierers und dessen strategischen Einfluss übersehen. Dazu fasst man Mastermind als Zweipersonenspiel auf, natürlich ohne perfekte Information. Gefragt sind strategische Erwägungen, wie man sie vom Pokern kennt: Wie ist mein Gegner einzuschätzen? Welche Entscheidung traut er mir am wenigsten zu?

Allen theoretischen Mastermind-Analysen gemein ist, dass bei ihnen die spielerische wie deduktive Eleganz des Spiels aufgegeben wird. Statt zwischen den einzelnen Antworten kunstvoll logische Verbindungen zu knüpfen, operiert man mit einem simplen, aber universellen Aussortier-Mechanismus. Das heißt, gemäß dem Motto "Quantität statt Qualität" wird genau das gemacht, was ein Spieler tunlichst vermeidet: Man prüft alle denkbaren Codes darauf, ob sie im Einklang mit den bisherigen Erkenntnissen stehen. Zukünftige Schritte werden ebenfalls in dieser Weise geplant, indem man die Menge der noch in Frage kommenden Codes darauf testet, wie sie sich bei den ins Auge gefassten Rateversuchen und den darauf denkbaren Antworten verkleinert.

Fasst man die Menge aller k^n Codes zu einer Menge C_0 zusammen, lässt sich jeder Zwischenstand, das heißt jede Position, formal durch eine Teilmenge $C \subseteq C_0$ charakterisieren, die jeweils alle Codes enthält, die mit den bisherigen Erkenntnissen im Einklang stehen. Im Prinzip könnte Mastermind nun auf die Weise untersucht werden, dass man "einfach" alle Teilmengen von Codes untersucht. Davon gibt es aber viel zu viele – so existieren selbst beim relativ einfachen 6^4 -Mastermind immerhin 2^{1296} Teilmengen. Man schränkt daher die Untersuchungen auf wirklich einer Position entsprechende Teilmengen ein. Dazu definiert man die Mengen der Form C(q, a), wobei eine solche Menge alle Codes beinhaltet, die auf den Rateversuch q die Antwort a liefern. Jede Mastermind-Position entspricht nun einer Teilmenge der Form

$$C = \bigcap_{t=1}^{s} C(q_t, a_t).$$

Die angegebene Menge repräsentiert die Situation, wenn s Rateversuche $q_1, ..., q_s$ die Antworten $a_1, ..., a_s$ hervorgebracht haben. Spätestens dann, wenn der Durchschnitt aller noch

3 Strategische Spiele

3.1 Papier-Stein-Schere: Die unbekannten Pläne des Gegners

Wollen zwei Personen darum knobeln, wer eine angefallene Zeche zu bezahlen hat, so bietet sich dafür das Spiel Papier-Stein-Schere an. Darin haben beide Spieler übereinstimmende Zug- und Gewinnmöglichkeiten. Anders als bei symmetrischen Zweipersonen-Spielen mit perfekter Information ist aber kein Zug erkennbar, mit dem ein Spieler seinen Verlust verhindern kann. Was ist zu tun?

Von den drei in der Einführung erkannten Ursachen für die Ungewissheit der Spieler über den weiteren Verlauf einer Partie, nämlich Zufall, Kombinationsvielfalt und unterschiedliche Informationsstände, haben wir die ersten beiden bereits analysiert. Ausgeklammert wurde bisher die Ungewissheit, der ein Spieler ausgesetzt ist, wenn er nicht alles weiß, wovon sein Gegner Kenntnis hat. Wir wollen daher jetzt Spiele ohne perfekte Information untersuchen, bei denen man auch von **imperfekter Information** spricht.

Papier-Stein-Schere ist ein Spiel ohne Zufallseinfluss, dessen kombinatorische Komponente recht übersichtlich ist. Die gesamte Ungewissheit des Spiels beruht damit auf dem Fehlen einer perfekten Information, das heißt auf der Tatsache, dass die beiden Spieler gleichzeitig ziehen müssen, ohne dabei die gegnerische Entscheidung zu kennen. Jede der drei möglichen Züge kann zum Verlust führen: der "Stein" wird vom "Papier" geschlagen, die "Schere" vom "Stein" und das "Papier" von der "Schere". Sicher zu verhindern wäre ein Verlust nur dann, wenn die gleichzeitig erfolgende Entscheidung des Gegners erahnt werden könnte. Dann ließe sich sogar immer ein Gewinnzug finden.

Psychologische Einschätzungen des Gegners sind im praktischen Spiel sicherlich sehr wichtig, man denke nur an eine Poker-Runde, wie man sie zumindest aus Spielfilmen her kennt: Hat der Gegner wirklich ein so gutes Blatt wie es scheint? Oder blufft er nur? Das heißt, kann man es dem Gegner zutrauen, die bisherigen Gebote mit einem schlechteren Blatt gemacht zu haben als man es selbst besitzt? Eine wesentliche Rolle spielt dabei das Vorgeschehen: Wie risikofreudig und kaltblütig schätzt man die Persönlichkeit des Gegners ein? Wie hat sich der Spieler in den vorangegangenen Partien verhalten? Welche Ketten taktischer Überlegungen bereits ein ganz einfaches Spiel eröffnet, dafür findet man in Edgar Allan Poes *Der entwendete Brief* aus dem Jahr 1845 eine Kostprobe. Dort wird ein Schuljunge beschrieben, der bei einem zu Papier-Stein-Schere sehr ähnlichen Spiel "Gerade oder ungerade" großen Erfolg erzielte:

Dieses Spiel ist einfach und wird mit Murmeln gespielt. Ein Spieler hält eine Anzahl dieser Kugeln in der Hand und fragt einen anderen, ob es eine gerade oder ungerade Summe ist. Wenn der Betreffende richtig rät, hat er eine gewonnen; wenn falsch, eine verloren. Der Junge, den ich meine, gewann alle Murmeln in der Schule. Natürlich hatte er ein

Prinzip beim Raten; und es beruhte auf der bloßen Beobachtung und dem Abschätzen der Schläue seiner Gegner. Zum Beispiel ist der Gegner ein ausgemachter Dummkopf: er hält seine geschlossene Faust hoch und fragt: 'Gerade oder ungerade?'. Unser Schuljunge antwortet 'ungerade' und verliert. Aber beim nächsten Versuch gewinnt er, denn er sagt sich: 'Der Dummkopf hatte beim ersten Mal gerade, aber beim zweiten Versuch reicht seine Überlegung nur so weit, dass er jetzt ungerade macht; deshalb rate ich auf ungerade.' – Er rät auf ungerade und gewinnt. Bei einem Dummkopf von nächsthöherem Grad hätte er so kombiniert: 'Dieser Bursche merkt, dass ich beim ersten Mal ungerade geraten habe, und beim zweiten Mal wird er zunächst Lust zu einer simplen Abwechslung von gerade zu ungerade haben wie der erste Dummkopf. Aber dann wird ihm ein zweiter Gedanke kommen, dass dies nämlich eine zu simple Veränderung sei, und schließlich wird er sich wieder wie vorher zu gerade entscheiden. Deshalb rate ich auf gerade.' – Er rät auf gerade und gewinnt. Nun, welcher Art ist diese Kombination des Schuljungen, den seine Kameraden 'vom Glück begünstigt' nannten – wenn man sie letztlich analysiert?

Das Verfahren, mit dem der erfolgreiche Schuljunge seine Mitspieler zielsicher in Dummköpfe der verschiedenen Kategorien einteilt, um so zu gewinnen, muss – geradezu typisch für Poe – ein Mysterium bleiben. Für ein mathematisch präzise formulierbares Vorgehen scheint zunächst kein Raum vorhanden zu sein. Oder etwa doch? Sehen wir uns zunächst das Spiel als solches an: Bei "Gerade oder ungerade" besteht – wie beim Spiel Papier-Stein-Schere – eine gewisse Symmetrie zwischen den verschiedenen Zügen, das heißt, es gibt keine besseren oder schlechteren Züge. Im Unterschied zu Papier-Stein-Schere ist das Spiel selbst allerdings nicht symmetrisch, weil es kein Remis beim Aufeinandertreffen gleicher Strategien gibt.

Weit wichtiger als der Zug, für den man sich entscheidet, ist das Verfahren, wie man ihn wählt. Poes Schuljunge schätzt dazu seinen Gegner ein und berücksichtigt außerdem die Spielweisen in vorangegangenen Partien. Aber gibt es gegen dieses erfolgreich praktizierte Verfahren keine Gegenwehr? Oder ist man einem solchermaßen genialen Spieler wehrlos ausgesetzt und hat nur die Wahl zwischen Ruin und Beendigung des Spiels?

In der Tat gibt es eine ganz einfache Methode, dem psychologischen Genie zu trotzen. Statt sich den Kopf zu zerbrechen, welche eigenen Gedanken der Gegenspieler nachvollziehen kann und welche nicht, überlässt man die konkrete Entscheidungsfindung dem unvorhersehbaren Zufall. Bei "Gerade oder ungerade" nimmt man zum Beispiel, nachdem man verdeckt eine Karte aus einem gemischtem Kartenspiel gezogen hat, bei einer roten Karte eine Murmel und bei einer schwarzen Karte zwei Murmeln in die Hand. Vor dem Gegner geheim gehalten werden muss dabei nur die gezogene Karte, nicht aber die Absicht, den Zug auf diese Weise zu bestimmen.

Was wird mit diesem Kunstgriff, bei dem ein Spieler seine Entscheidung an den Zufall delegiert, erreicht? Der Gegner kann so lange und psychologisch so raffiniert überlegen, wie er will. Nützen tut ihm das nicht, denn letztlich spielt er ein reines Glücksspiel. Wie und auf welcher Grundlage er sich auch entscheidet, er verliert beziehungsweise gewinnt eine Murmel mit jeweils der Wahrscheinlichkeit von ½ und erzielt somit ein im Durchschnitt ausgeglichenes Ergebnis. Defensive Ansprüche sind damit vollends erfüllt, allerdings um den Preis, dass selbst gegen einen offensichtlich durchschaubaren Gegner kein Vorteil errungen wird, da keine Informationen und Eindrücke über den Gegner berücksichtigt werden.

Um die beschriebene Technik auch auf andere Spiele übertragen zu können, wollen wir sie nochmals in formaler Weise beschreiben. Wir verwenden dazu die Normalform, wie wir sie

in Kapitel 2.1 kennen gelernt haben. Dort haben wir uns bereits überlegt, dass jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel durch eine unter Umständen gigantische Gewinntabelle repräsentiert werden kann. Legt nämlich jeder Spieler seine gesamte Verhaltensweise während einer Partie im Voraus fest, dann reduziert sich das Spiel auf einen simultanen Doppelzug, sodass ein Ablauf wie bei "Gerade oder ungerade" und Papier-Stein-Schere entsteht. Konkret muss dazu ein Spieler für jede Situation, in der ihm während einer Partie gegebenenfalls ein Zug abverlangt wird, bereits zu Anfang der Partie eine definitive Zugentscheidung treffen. Das mag in der Spielpraxis völlig unrealistisch sein. Für die Theorie ist es hingegen ausschließlich von Bedeutung, dass das Spiel bei einer solchen Modifikation substantiell unverändert bleibt. Von Neumann und Morgenstern (1902-1977), die Begründer der Spieltheorie, bemerkten dazu²²⁷:

Wir wollen uns jetzt vorstellen, daß jeder Spieler ... die Entscheidung über jeden Zug nicht erst dann trifft, wenn die Notwendigkeit dafür vorliegt, sondern daß er sich über sein Vorgehen bei allen möglichen Situationen vorher schlüssig wird; d.h. daß der Spieler ... mit einem vollständigen Plan zu spielen beginnt: einem Plan, der angibt, welche Wahl er zu treffen hat in allen möglichen Situationen, für jede nur mögliche wirkliche Information, die er in diesem Augenblick ... besitzen kann. Einen derartigen Plan nennen wir eine Strategie.

Man beachte, dass wir die Handlungsfreiheit des Spielers nicht einschränken, wenn wir fordern, dass jeder Spieler mit einem derartigen Plan, also einer Strategie, das Spiel beginnen soll. Wir zwingen ihn also dadurch nicht, Entscheidungen auf der Basis geringerer Information zu treffen, als ihm sonst bei jeder wirklichen Partie zur Verfügung steht. Das rührt daher, dass die Strategie jede spezielle Entscheidung nur ... (in Abhängigkeit) derjenigen aktualen Information angeben soll, die dem Spieler für diesen Zweck in einer aktualen Partie zur Verfügung stehen würde. Die zusätzliche Last, die unsere Annahme dem Spieler auferlegt, ist eine gedankliche: er soll mit einer Verhaltensregel für alle Eventualitäten ausgerüstet sein, obwohl er nur an einer Partie teilnimmt. Das ist jedoch eine zulässige Annahme, die in den Grenzen mathematischer Untersuchungen liegt.

Im Unterschied zu den meisten anderen Spielen, bei denen die Normalform aufgrund ihrer unermesslichen Größe nur von einem rein theoretischen Interesse ist, ergeben sich bei "Gerade oder ungerade" und Papier-Stein-Schere sehr übersichtliche Normalformen. Nimmt der ratende Spieler die Position von "Schwarz" ein, dann entsprechen die Einträge der in Tabelle 41 zusammensgestellten Normalform den Gewinnen seines Gegners "Weiß", der die zu ratende Wahl trifft.

Schwarz rät			"ungerade"	"gerade"	
Weiß wählt			1	2	
"ungerade"		1	-1	1	
"gerade"		2	1	-1	

Tabelle 41 Die Normalform von "Gerade oder ungerade": Weiß wählt, Schwarz rät

Das Spiel besitzt keinen Sattelpunkt, wie er aufgrund Zermelos Bestimmtheitssatz für Spiele mit perfekter Information immer existiert. So muss jeder der beiden Spieler bestrebt sein, sei-

²²⁷ John von Neumann, Oskar Morgenstern, *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten*, Würzburg 1961 (amerikan. Orig. 1944); S. 79 f.

Schwarz wählt		"Papier"	"Stein"	"Schere"	
Weiß wählt		1	2	3	
"Papier"	1	0	1	-1	
"Papier" "Stein"	2	-1	0	1	
"Schere"	3	1	-1	0	

 Tabelle 42
 Normalform des Spiels Papier-Stein-Schere

Erstmals in diesem Sinne formal untersucht wurde Papier-Stein-Schere 1924 von Émile Borel²²⁸, einem der Mitbegründer der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung²²⁹, der zu jener Zeit übrigens Mitglied der französischen Abgeordnetenkammer war und ein Jahr später sogar kurzzeitig Marineminister im Kabinett seines Mathematiker-Kollegen Paul Painlevé (1863-1933) wurde. Borel hatte 1921 bereits als Erster den spielerischen Vorteil von gemischten Strategien entdeckt und dabei – ebenfalls als erster – Normalformen als eine universelle Beschreibung von Spielen erkannt²³⁰. Mischen Weiß und Schwarz ihre Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten p, q, r beziehungsweise u, v, w, so ergibt sich für Weiß bei Papier-Stein-Schere eine Gewinnerwartung von

$$(r-q)u + (p-r)v + (q-p)w$$
.

Wie schon Borel es tat, lässt sich anhand dieser Formel sofort erkennen, dass Weiß vor einer negativen Gewinnerwartung nur dann geschützt ist, wenn die drei Zahlen $r-q,\ p-r$ und q-p alle gleich 0 sind. Andernfalls befindet sich nämlich unter den drei Zahlen, deren Summe gleich 0 ist, zumindest eine negative, so dass Schwarz mit einer darauf abgestimmten reinen Strategie Weiß eine negative Gewinnerwartung beibringen könnte.

Selbstverständlich galt Borels eigentliches Interesse nicht dem Spiel Papier-Stein-Schere. So erinnerte er unter anderem an die Frage, ob es beim Baccarat günstig ist, beim Wert 5 eine weitere Karte zu ziehen²³¹. Allgemein suchte er nach einem Weg, wie ein Spieler in einem symmetrischen Zwei-Personen-Nullsummenspiel einen Nachteil in Form einer negativen Gewinnerwartung verhindern kann²³²:

Wir betrachten ein Spiel, bei dem der Gewinn vom Zufall und Geschick der Spieler ab-

²³⁰ Émile Borel, *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, <u>173</u> (1921), S. 1304-1308. Als englische Übersetzung: *The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels*, Econometrica, <u>21</u> (1953), S. 97-100.

²²⁸ Émile Borel, Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des jouers, in: Théorie des Probabilités, Paris 1924; englische Übersetzung: On games that involve chance and the skill of the players, Econometrica, <u>21</u> (1953), S. 101-127.

²²⁹ Siehe auch Kapitel 1.5.

²³¹ Im zweiten Abschnitt der in Fußnote 228 genannten Untersuchung verweist Borel auf Joseph Bertrand, der diese Frage in seinem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung Calcul des probabilités erwähnt. Bertrands Buch erschien erstmals 1889. Die Untersuchung des Baccarat wird dort in Chap. II, 33, Problème XIX beschrieben (2. Auflage, Paris 1907, nachgedruckt New York 1972). Sowohl für den Spieler als auch für die Bank vergleicht Bertrand die Entscheidungsmöglichkeiten untereinander, wobei er die Strategie der Gegenseite jeweils als bekannt voraussetzt. Wir werden Baccarat in Kapitel 3.10 untersuchen.

²³² Siehe Fußnote 230. In dieser Arbeit von 1921 beschränkt sich Borel noch auf Spiele, die nur in einfacher Höhe gewonnen oder verloren werden können. Insofern werden darin nur Gewinnwahrscheinlichkeiten untersucht.

3.2 Minimax kontra Psychologie: Selbst beim Pokern?

Zwei Spieler pokern eine Runde von zwei Partien, bei denen das Eröffnungsrecht abwechselt. Kann ein Spieler seine Strategie zufallsabhängig so variieren, dass er einen durchschnittlichen Gesamtverlust verhindern kann?

Mit der Frage wird der zum Ende des letzten Kapitels formulierte Problemkreis anhand eines plakativen Beispiels konkretisiert. Dabei kommt es uns hier nicht auf die Details des Poker-Spiels an, und folglich suchen wir auch keine explizite Strategie, sondern es geht uns zunächst nur darum, die prinzipielle Tauglichkeit von gemischten Strategien zu untersuchen. Kann in der Poker-Runde unabhängig von psychologischen Momenten eine negative Gewinnerwartung verhindert werden, so wie ein Spieler bei zwei Partien Schach mit wechselnden Farben rein theoretisch stets zumindest ein Remis erzwingen kann? Das heißt, kann man abhängig vom eigenen Informationsstand, der insbesondere das eigene Blatt und die bisherigen Gebote umfasst, seine Handlungsweise im Prinzip in einer solchen Weise zufällig variieren, dass eine Gewinnerwartung von mindestens 0 garantiert ist?

Pokern bietet sich insofern als ein typisches Beispiel an, da die Eigenschaft der imperfekten Information ganz wesentlich den Charakter des Poker-Spiels bestimmt. Jeder Spieler kennt nur die eigenen Karten und versucht, aus den gegnerischen Handlungsweisen Schlüsse zu ziehen: Ist das gegnerische Blatt wirklich so gut, wie es aufgrund der bisherigen Gebote scheint? Oder reicht das eigene Blatt dazu aus, einen noch höheren Betrag darauf zu setzen, dass es das beste ist?

Nur wenig später als Borel, aber ohne dessen Arbeiten und deren pessimistisches Resümée zu kennen, beschäftigte sich ein weiterer Mathematiker mit solchen Problemen. Es war das Jahr 1926, und der junge ungarische Mathematiker John von Neumann war gerade nach Göttingen – damals eine der weltweit bedeutendsten Stätten mathematischer Forschung – gekommen, nachdem er in jenem Jahr sowohl in Budapest in Mathematik promoviert als auch in Zürich sein Chemie-Diplom erlangt hatte. Ein Interesse von Neumanns, wenn auch sicherlich nicht das primäre, galt den mathematischen Eigenschaften von Spielen und das mit ernstem Hintergrund: Hatte Borel bereits 1921 auf gewisse Analogien zwischen Spielen einerseits sowie Ökonomie und Kriegskunst andererseits aufmerksam gemacht, so sah von Neumann Spiele als ein universelles Modell für Entscheidungsprozesse²³⁴:

Und letzten Endes kann auch irgendein Ereignis, mit gegebenen äußeren Bedingungen und gegebenen Handelnden (den absolut freien Willen der letzteren vorausgesetzt), als Gesellschaftsspiel angesehen werden, wenn man seine Rückwirkungen auf die in ihm handelnden Personen betrachtet.

Die von ihm gestellte Frage nach günstigen Spielweisen innerhalb von Gesellschaftsspielen erhält daher ein hohes Gewicht, denn

... es gibt wohl kaum eine Frage des täglichen Lebens, in die dieses Problem nicht hineinspielte; ...

Von Neumanns Untersuchungen, die auch stark vereinfachte Poker-Modelle umfassten²³⁵, mündeten in einem am 7. Dezember 1926 vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrag, dessen Inhalt knapp zwei Jahre später in einer Fachzeitschrift veröffentlicht wurde²³⁶. Darin grenzt er zunächst die von ihm untersuchten Objekte mit einer formalen Definition eines (Gesellschafts-)Spiels ein. Wie schon Borel begründet er dann, dass sich Spiele stets in eine Form transformieren lassen, bei der jeder Spieler nur eine Zugentscheidung zu treffen hat, und zwar gleichzeitig mit allen anderen Mitspielern. Diese Form des Spiels – eben die Normalform – ist dann der Ausgangspunkt seiner weiteren Betrachtungen.

Die Zahl der Mitspieler ist bei von Neumann beliebig, allerdings setzt er bei den Gewinnen die Nullsummen-Eigenschaft voraus. Er beginnt damit, Zweipersonenspiele darauf zu untersuchen, wie sich die Gewinnaussichten der beiden mit S_1 und S_2 bezeichneten Spieler in den Daten der Normalform widerspiegeln, und erkennt so die Bedeutung des Maximin- und des Minimax-Wertes. Der Maximin-Wert ist laut von Neumann

-

²³⁴ John von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen, <u>100</u> (1928), S. 295-320; Werke: Band IV, S. 1-26.

²³⁵ Siehe dazu die Fußnote auf S. 190 von John von Neumann, Oskar Morgenstern, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961 (amerikan. Orig. 1944) sowie die in Fußnote 234 genannte Arbeit. Am Schluss der letztgenannten Arbeit kündigt John von Neumann Untersuchungen zu Baccarat und vereinfachten Poker-Modellen an, welche die Notwendigkeit des Bluffens mathematisch beweisen würden.

²³⁶ Siehe Fußnote 234 sowie in Anknüpfung an die ihm nachträglich bekannt gewordenen Arbeiten von Borel: J. v. Neumann, *Sur la théorie des jeux*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, <u>186</u> (1928), S. 1689-1691.

das beste Resultat, das S_1 erzielen kann, wenn ihn S_2 vollkommen durchschaut ... (Auf Grund der Spielregeln durfte S_2 nicht wissen, was S_1 spielen wird, er mußte es also aus anderen Gründen wissen, wie S_1 spielt, das ist es, was wir mit "durchschauen" andeuten wollen).

Analog steht der Minimax-Wert für

das beste Resultat, das S_2 erzielen kann, wenn ihn S_1 durchschaut hat. Wenn die beiden Zahlen gleich sind, so bedeutet dies: es ist gleichgültig, welcher von beiden Spielern der bessere Psychologe ist, das Spiel ist so unempfindlich, daß immer dasselbe herauskommt

Die Verschiedenheit der zwei Größen ... bedeutet eben, daß von zwei Spielern S_1 und S_2 nicht jeder gleichzeitig der klügere sein kann.

Bereits im nächsten Satz kündigt von Neumann seine entscheidende Erkenntnis an:

Es gelingt aber trotzdem mittels eines Kunstgriffes, die Gleichheit der zwei oben erwähnten Ausdrücke zu erzwingen.

Mit dem "Kunstgriff" meint von Neumann, dass die Spieler ihre Verhaltensregeln in einer konkreten Partie zufällig auswählen. Von Neumann hat damit dieselbe Idee wie Borel, nur dass er den Ansatz der gemischten Strategie bis zur Vollendung führt, indem er zeigt, dass bei jedem dermaßen in seinen Zugmöglichkeiten erweiterten Spiel Maximin- und Minimax-Wert übereinstimmen²³⁷. Dank diesem so genannten **Minimax-Satz**, der für jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel gilt, braucht sich kein Spieler davor zu fürchten, dass der Gegner seine strategischen Erwägungen und Pläne durchschaut – vorausgesetzt, der Spieler hat seine Strategien Minimax-mäßig gemischt, wie es immer möglich ist. Bezogen auf die symmetrische Poker-Runde existiert also eine gemischte Strategie, die – wie immer sie im Detail auch aussehen mag – eine negative Gewinnerwartung verhindert.

Von Neumanns Untersuchung wurde zunächst nur wenig beachtet²³⁸. Eine breitere Resonanz erhielten die Resulate erst, als John von Neumann 1944 zusammen mit dem Ökonomen Oskar Morgenstern, übrigens (in unehelicher Abstammung) ein Enkel des deutschen 99-Tage-Kaisers Friedrich III, eine umfangreiche Monographie *Theory of games and economic behavior* veröffentlichte²³⁹. Es war dies die Geburtsstunde der mathematischen **Spieltheorie**, obwohl wesentliche Aspekte bereits 18 Jahre bekannt waren.

Welchen Stellenwert die Borel'schen Arbeiten bei der Entwicklung der Spieltheorie einnehmen, war Gegenstand einer 1953 von dem französischen Mathematiker Fréchet initiierten Kontroverse: Maurice Fréchet, Emile Borel, initiator of the theory of psychological games and its applications, Econometrica 21 (1953), S. 95-96; Maurice Fréchet, Commentary on the three notes of Emile Borel, ebenda, S. 118-124; J. von Neumann, Communications on the Borel notes, ebenda, S. 124-125.

²³⁸ Eine bemerkenswerte Ausnahme ist die kurze Schrift René de Possel, Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion, Paris 1936, Reprint in: Hevre Moulin, Fondation de la théorie des jeux, Paris 1979, in der auf knapp vierzig Seiten die unterschiedliche Natur von Spielen in populärer Weise erläutert wird. Bezugnehmend auf Borel unterschiedte Possel nach Spielen des Zufalls, des Nachdenkens und der List. Dabei ist "ein Spiel empfänglich für List, wenn ein Spieler einen Vorteil daraus ziehen kann, wenn er die Gedanken seiner Gegner kennt". Alle drei Typen von Spielen und Spieleinflüssen werden mathematisch erörtert. Für Spiele der List wird von Neumanns Minimax-Satz erläutert.

²³⁹ Zur Entstehungsgeschichte der Monographie und Werdegang der Autoren: H. W. Kuhn, *John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics*, Bulletin of the American

ner einzelnen Partie kann das Resultat deutlich ungünstiger sein. In den Worten von Neumanns²⁴³:

Trotzdem ... der Zufall (durch die Einführung der Erwartungswerte ...) ... aus den betrachteten Gesellschaftsspielen eliminiert wurde, ist er wieder von selbst aufgetreten: selbst wenn die Spielregel keinerlei "hazarde" Elemente enthält ..., ist es doch unumgänglich notwendig, das "hazarde" Element, bei der Angabe der Verhaltungsmaßregeln für die Spieler, wieder in Betracht zu ziehen. Das Zufallsabhänige ("hazarde", "statistische") liegt so tief im Wesen des Spieles (wenn nicht im Wesen der Welt) begründet, daß es gar nicht erforderlich ist, es durch die Spielregel künstlich einzuführen: auch wenn in der formalen Spielregel davon keine Spur ist, bricht es sich von selbst die Bahn.

Die Beweisidee des Minimax-Satzes

Wir beschränken uns im folgenden Überblick im Wesentlichen auf den Fall, dass Weiß genau zwei Strategien hat, weil dann der dem Minimax-Satz zugrundeliegende Sachverhalt geometrisch in der Ebene veranschaulicht werden kann. Die durchgeführte Konstruktion ist allerdings universell und funktioniert genauso, wenn Weiß mehr als zwei Strategien besitzt – jedoch ist dann eine höherdimensionale Darstellung notwendig. Exakt nachprüfen lässt sich die hier geometrisch veranschaulichte Argumentation mit Standardmethoden der analytischen Geometrie, und zwar in voller Allgemeinheit.

Wir beweisen zunächst die folgende Alternative:

Entweder,

• Schwarz kann mit einer gemischten Strategie die Gewinnerwartung von Weiß auf höchstens 0 beschränken,

oder

• Weiß besitzt eine Strategie, mit der er sich eine positive Gewinnerwartung sichern kann

Die notwendige Konstruktion verdeutlichen wir an zwei Beispielen mit den folgenden Normalformen:

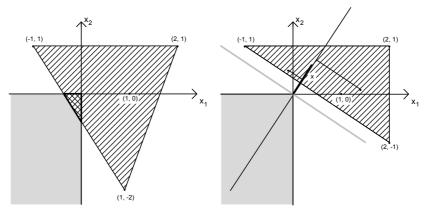
		Sc	Schwarz:			
		1	2	3	4	
Weiß:	1	1	-1	1	2	
	2	-2	1	0	1	

		Sc	Schwarz:			
		1	2	3	4	
Weiß:	1	2	-1	1	2	
	2	-1	1	0	1	

Zunächst werden die Gewinne, wie sie Weiß bei den verschiedenen Strategien von Schwarz erhalten kann, in ein ebenes Koordinatensystem eingetragen: Jede reine Strategie von Schwarz ergibt einen Punkt, dessen erste Koordinate gleich dem Gewinn von Weiß ist, wenn dieser seine erste Strategie wählt, und dessen zweite Koordinate analog dem Gewinn von Weiß entspricht, falls der sich für seine zweite Strategie entscheidet. Auch die gemischten Strategien von Schwarz lassen sich so darstellen. Sie "mitteln" die reinen Strategien, und zwar in geometrischer Hinsicht genauso wie im Hinblick auf das quantitative Spielresultat. Beispielsweise liegt eine im Verhältnis 1:1 gemischte Strategie geometrisch genau in der Mitte zwischen den beiden reinen Strategien, aus denen sie

²⁴³ In der in Fußnote 234 genannten Arbeit am Ende von Abschnitt II.

gemixt wurde. Für die beiden Beispiele ist die Gesamtheit aller gemischten Strategien in der nächsten Abbildung schraffiert dargestellt. Wie man sieht, wird der Bereich von den Punkten, die durch die reinen Strategien vorgegeben sind, "aufgespannt". Auch allgemein ist zu je zwei Punkten immer ebenso die komplette Verbindungslinie enthalten. Ausgehend von den Punkten, die den reinen Strategien entsprechen, ergibt sich so sukzessive der gesamte, den gemischten Strategien entsprechende Bereich:



Bezogen auf den gerastert dargestellten Quadranten des Koordinatensystems, innerhalb dem keine Koordinate positiv ist, gibt es nun zwei Fälle, wie sie in der Abbildung zu den beiden Beispielen bereits dargestellt sind. Wir werden sehen, dass diese Einteilung den beiden Alternativen entspricht:

- Im links dargestellten Fall kann Schwarz eine gemischte Strategie finden, bei der Weiß für sich keine positive Gewinnerwartung erreichen kann. Dazu geeignet sind alle gemischten Strategien, die dem Überlappungs-Bereich entsprechen.
- Im rechts abgebildeten Fall, bei dem es keine Überlappung gibt, sucht man die kürzeste Verbindungslinie zwischen den beiden markierten Bereichen. Eine solche existiert tatsächlich immer, da asymptotische Situationen, wie man sie von Hyperbeln und ihren Achsen kennt, aufgrund der beschränkten Größe des schraffierten Strategie-Bereichs ausgeschlossen sind. Ist eine Linie mit minimaler Distanz gefunden sie muss übrigens keineswegs zwangsläufig im Nullpunkt beginnen –, dann liefert deren Richtung die gesuchte Strategie für Weiß:
 - Zunächst kann keine Koordinate des gefundenen Richtungsvektors negativ sein, da sich sonst durch eine Verschiebung des im Quadranten liegenden Fußpunktes eine kürzere Verbindung finden ließe. Darüber hinaus besitzt der gefundene Vektor mindestens eine positive Koordinate.
 - Damit lässt sich das Verhältnis der Koordinaten untereinander als Verhältnis interpretieren, mit dem Weiß seine reinen Strategien mischen kann. Der auf die Länge 1 normierte Vektor der Wahrscheinlichkeiten ist in der Abbildung dick dargestellt und mit "x" bezeichnet.
 - Auch der Gewinn, den Weiß mit der so gefundenen Strategie x erzielen kann, besitzt eine geometrische Interpretation: So wie bei reinen Strategien von Weiß der Gewinn gleich der entsprechenden Koordinate der geometrisch dargestellten Strategie von Schwarz ist, so ist im allgemeinen Fall ein Skalarprodukt zu bilden. Und dieses Produkt ist gleich der Länge, die sich bei der Projektion auf die gefundene

3.3 Poker-Bluff: Auch ohne Psychologie?

Der Erfolg eines guten Pokerspielers beruht zum Teil auf seinen Bluffs. Auf welcher Basis entscheidet man sich aber zu einem solchen Bluff? Setzen Bluffs eine treffende psychologische Einschätzung des Gegners voraus? Oder sind sie Ausdruck einer objektiven Optimalität im mathematischen Sinn, mit der die strategischen Möglichkeiten des Gegners Minimaxmäßig pariert werden?

Von Neumanns Minimax-Satz garantiert jedem Spieler eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels optimale Strategien. Damit kann man – zumindest in der Theorie – selbst einem gewieften Taktiker wie dem sprichwörtlichen "Pokerface" widerstehen. Allerdings hat die defensive Basis der optimalen Strategie auch ihre Nachteile, da aus Schwächen eines erkennbar ungeschickt agierenden Spielers kein gezielter Vorteil gezogen wird. Solche Vorteile bleiben den Spielern vorbehalten, die ihr Gegenüber realistisch einschätzen können.

Welche Gestalt eine Minimax-Optimalität im konkreten Einzelfall aufweist und wie sie mit der empirischen Erfahrung der Spielpraxis im Einklang steht, ist zunächst völlig offen. Mit der eingangs gestellten Frage wird das Problem auf das Pokern und die dort verwendete Technik des Bluffens konkretisiert: Soll man nur dann bluffen, wenn man davon ausgehen kann, damit einen unerfahrenen und daher un- oder übervorsichtigen Gegner übertölpeln zu können? Oder ist der Bluff selbst dann ab und zu angebracht, wenn keinerlei Informationen über die Verhaltensweise des Gegners bekannt sind?

Poker wird in vielfältigen Varianten gespielt²⁴⁴. Der gemeinsame Kern aller Varianten ist es, dass jeder Spieler Beträge darauf setzt, dass er das beste Blatt hält. Nur wer bis zum Schuss der mehrstufigen Bietphase mithält, ist beim so genannten Showdown dabei, bei dem die Kartenblätter der übrig gebliebenen Spieler verglichen werden – steigen alle Spieler bis auf einen aus, gewinnt dieser sogar ohne Showdown. Es liegt nahe, dass gute Blätter eher hohe Gebote erlauben als niedrige. Aber natürlich wäre es wenig sinnvoll, die Höhe seines Gebotes in einer solchen Weise starr an der Stärke des eigenen Blattes auszurichten, die vom Gegner durchschaut werden kann. John von Neumann und Oskar Morgenstern bemerkten dazu²⁴⁵:

Das wesentliche Moment bei all diesem ist, daß ein Spieler mit starkem Blatt wahrscheinlich hoch bieten – und oft überbieten wird. Wenn folglich ein Spieler hoch bietet oder überbietet, so kann sein Gegenspieler – *a posteriori* – annehmen, daß der andere ein starkes Blatt hat. Unter Umständen kann das den Gegner zum "Passen" veranlassen. Da aber beim "Passen" die Karten nicht verglichen werden, kann gelegentlich auch ein Spieler mit schwachem Blatt einen Gewinn gegen einen stärkeren Gegner erzielen, indem er durch hohes Bieten oder Überbieten einen (falschen) Eindruck von Stärke hervorruft und

_

²⁴⁴ Claus D. Group, Alles über Pokern, Niedernhausen 1987; Kay Uwe Katira, Poker und andere Kartenspiele, Ravensburg 1979; John Scarne, Complete guide to gambling, New York 1974, S. 670-701.

Spielerische, historische und mathematische Aspekte des Pokern werden erörtert in: John Mc Donald, *Poker: an american game*, Fortune, <u>37</u>, March 1948, S. 128-131, 181-187. Ergänzungen zu diesem Artikel findet man in John Mc Donald, *A theory of strategy*, Fortune, <u>39</u>, June 1949, S. 100-110; John Mc Donald, *Strategy in poker, business and war*, New York 1950.

²⁴⁵ John von Neumann, Oskar Morgenstern, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961 (amerikan. Orig. 1944). Die hier zitierten Passagen sind den Seiten 190-192 entnommen.

so seinen Gegner begreiflicherweise zum Passen veranlaßt.

Dieses Manöver ist als "Bluffen" bekannt. Es wird zweifellos von allen erfahrenen Spielern angewandt. Ob das aber wirklich aus dem oben geschilderten Motiv geschieht, kann man bezweifeln; tatsächlich ist eine andere Erklärung vorstellbar. Wenn nämlich von einem Spieler bekannt ist, daß er nur bei starkem Blatt hoch bietet, so wird sein Gegner in solchen Fällen passen. Der Spieler wird daher gerade in den Fällen, wo seine wirkliche Stärke die Möglichkeit dazu bietet, nicht in der Lage sein, durch hohes Bieten oder häufiges Überbieten große Gewinne zu erzielen. Daher ist es für ihn ratsam, bei seinem Gegner in dieser Beziehung Ungewißheit zu erzeugen – d.h. durchblicken zu lassen, daß er mitunter auch bei schwachem Blatt hoch bietet.

Zusammengefasst: Von den beiden möglichen Motiven für das Bluffen ist das erste der Wunsch, bei (wirklicher) Schwäche den (falschen) Eindruck von Stärke zu erwecken; der zweite der Wunsch, bei (wirklicher) Stärke den (falschen) Eindruck von Schwäche zu erwecken. Beides sind Beispiele für ... Irreführung des Gegners.

Typische Eigenschaften der Poker-Varianten lassen sich in einfache Modelle übertragen, die im Gegensatz zu den realen Spielvarianten mathematisch mit vertretbarem Aufwand analysiert werden können. Wie physikalische Modelle bieten sie zugleich den Vorteil, dass die charakteristischen Eigenschaften deutlich erkennbar sind. Dazu wieder von Neumann und Morgenstern:

Jedoch ist das wirkliche Pokern ein viel zu komplizierter Gegenstand für eine erschöpfende Diskussion, und so müssen wir es einigen vereinfachenden Modifikationen unterwerfen, von denen einige wirklich sehr radikal sind. Trotzdem scheint uns, daß die Grundidee des Pokerns und seine entscheidende Eigenschaften in unserer vereinfachten Form erhalten bleiben. Daher wird es uns möglich sein, allgemeine Schlußfolgerungen und Interpretationen auf den Ergebnissen zu gründen, die wir nun mit Hilfe der früher aufgestellten Theorie herleiten wollen.

Wir gehen von einem denkbar einfachen Spiel aus, das die für Pokern typischen Spielelemente beinhaltet:

- Jeder der beiden Spieler erhält, nachdem er seinen Einsatz von 8 Einheiten getätigt hat, zufällig eine hohe oder niedrige Karte. Die beiden Kartenwerte sind gleichwahrscheinlich. Außerdem werden die Karten beider Spieler als unabhängig voneinander vorausgesetzt, das heißt, jeder Spieler erhält die Karte von einem individuellen Kartenstapel.
- Der beginnende Spieler kann passen oder seinen Einsatz von 8 auf 12 erhöhen. Passt er, findet sofort ein Showdown statt, wobei der Spieler mit der höheren Karte die Einsätze beider Spieler gewinnt bei gleich hohen Karten erhält jeder seinen Einsatz zurück.
- Hat der erste Spieler erhöht, kann der zweite Spieler entscheiden, ob er passen oder mitziehen möchte. Im ersten Fall verliert er seinen Einsatz. Im zweiten Einsatz erhöht auch er seinen Einsatz um 4 zum "Sehen", das heißt zum sofortigen Showdown. Dabei wird wieder der Gewinner auf der Basis der höheren Karte ermittelt.

In Form eines Ablaufschemas sind die Spielregeln in Bild 50 dargestellt.

3.4 Symmetrische Spiele: Nachteile sind vermeidbar, aber wie?

Bei symmetrischen Zwei-Personen-Nullsummenspielen ist beiden Spielern die Existenz einer gemischten Strategie garantiert, mit der eine negative Gewinnerwartung verhindert werden kann. Wie lässt sich eine solche Strategie berechnen?

Symmetrische Spiele wurden bereits von Borel bevorzugt betrachtet. Wie in Kapitel 3.1 erörtert, kann man sich bei der Untersuchung von Spielen auf symmetrische Spiele beschränken, da jedes Spiel als Teil eines symmetrischen Spiels gesehen werden kann. Dabei kann ein Spiel, dessen Normalform n Zeilen und m Spalten umfasst, in ein symmetrisches Spiel "eingebettet" werden, bei dem jeder der beiden Spieler über m + n + 1 Strategien verfügt^L. Außerdem ist der Minimax-Wert eines symmetrischen Spiels a priori bekannt, er ist nämlich gleich 0. Damit kann eine gegebene Strategie relativ einfach darauf getestet werden, ob sie tatsächlich optimal ist; auch dies wurde bereits in Kapitel 3.1 dargelegt: Es ist nämlich zu prüfen, wie sich die gegebene Strategie gegen jede mögliche reine Strategie des Gegners verhält, das heißt, es sind die entsprechenden Gewinnerwartungen zu berechnen. Dabei ist eine Strategie für Weiß genau dann optimal, wenn keine dieser Gewinnerwartungen negativ ist, und das kann, wie schon Borel erkannte, durch das Lösen eines Ungleichungssystems festgestellt werden.

Wird etwa zu dem Spiel mit der Normalform

Schwa Weiß wählt	rz wählt t	1	2	3	4
	1	0	1	-3	2
	2	-1	0	1	-4
	3	3	-1	0	3
	4	-2	4	-3	0

eine Minimax-Strategie für Weiß gesucht, so ist das lineare Ungleichungssystem

$$-x_{2} +3x_{3} -2x_{4} \ge 0$$

$$x_{1} -x_{3} +4x_{4} \ge 0$$

$$-3x_{1} +x_{2} -3x_{4} \ge 0$$

$$2x_{1} -4x_{2} +3x_{3} \ge 0$$

zu lösen, wobei zusätzlich noch die Bedingungen

$$x_1 \ge 0$$
, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ und $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

erfüllt sein müssen.

Solche Ungleichungssysteme können als eine Verallgemeinerung linearer Gleichungssysteme gesehen werden, wie sie in der Mathematik vielfältig untersucht werden. Neben Größeroder-Gleich-Beziehungen können sowohl Gleichungen als auch Kleiner-Gleich-Beziehungen enthalten sein. Auch diese lassen sich, sollte es erforderlich werden, in Größer-oder-Gleich-Beziehungen transformieren – eine Gleichung ergibt dabei zwei Ungleichungen. Im Vergleich zu den linearen Gleichungssystemen besitzt die Theorie der Ungleichungssysteme eine deutlich kürzere Tradition. George Dantzig (1914-2005) bemerkt dazu²⁴⁶:

So ist es ziemlich merkwürdig, daß bis 1947 die lineare Ungleichungstheorie nur vereinzelte Spezialarbeiten herausbrachte, während die linearen Gleichungen und verwandte Gebiete der linearen Algebra und Approximationstheorie eine umfangreiche Literatur entwickelt hatten. Vielleicht war dieses unverhältnismäßig starke Interesse an linearer Gleichungstheorie mehr, als Mathematiker zugeben mögen, durch ihre Benutzung als wichtiges Hilfsmittel für Theorien motiviert, die sich mit dem Verstehen der physikalischen Welt befassen.

In dieses Bild passt auch, dass Borel die zu symmetrischen Spielen gehörenden Ungleichungssysteme nicht als generell lösbar erkannte, obwohl andere Mathematiker solche Probleme in isolierten Untersuchungen bereits einige Jahre zuvor gelöst hatten. Einen Umschwung brachte erst 1947 die maßgeblich von Dantzig, damals ziviler Mitarbeiter der US Air Force, durchgeführte Entwicklung der Linearen Optimierung, einer Disziplin, die zunächst für Anwendungen im Bereich der militärischen Logistik begründet wurde. Gegenstand der Linearen Optimierung sind Methoden, mit denen zum Beispiel Kosten minimiert oder Erträge maximiert werden können, sofern die beeinflussenden Parameter, deren mögliche Werte und deren Wirkung auf die zu optimierende Größe vollständig bekannt sind und dieses Gesamtsystem eine bestimmte, eben lineare Form aufweist. Als Dantzig wiederholt auf solche Probleme stieß und dabei eine typische, oft wiederkehrende Form erkannte, wandte er sich zunächst an den Ökonomen und späteren Nobelpreisträger Tjalling Koopmans (1910-1985). Seine Hoffnung, auf längst bekannte Lösungsmethoden aufmerksam gemacht zu werden, erfüllte sich aber nicht²⁴⁷. So machte sich Dantzig selbst auf die Suche nach einem praktikablen Lösungsverfahren. Dabei entstand 1947 der sogenannte Simplex-Algorithmus (siehe Kästen Lineare Optimierung und Der Simplex-Algorithmus).

²⁴⁶ G. B. Dantzig, *Lineare Programmierung und Erweiterungen*, Berlin 1966 (amerikan. Orig. 1963), S. I.

²⁴⁷ Erst später wurde bekannt, dass der russische Mathematiker Leonid Vital'evich Kantorowicz (1912-1986) sich bereits ein Jahrzehnt früher mit solchen Optimierungsfragen beschäftigt hatte. Durch verschiedene Hemmnisse und erforderliche Rücksichtnahmen blieb ihm der Durchbruch allerdings versagt, auch wenn in seinen Arbeiten viele der wesentlichen Ideen schon vorhanden sind. 1975 erhielt Kantorowicz zusammen mit Koopmans den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Siehe dazu S. 26-28 des in Fußnote 246 genannten Buches von Dantzig sowie L. V. Kantorovich, *My journey in science*, Russian Mathematical Surveys, <u>42:2</u> (1987), S. 233-270; L. V. Kantorovich, *Mathematical methods of organizing and planning production*, Management Science, <u>6</u> (1960), S. 366-422 (russ. Orig. 1939).

Lineare Optimierung

Ein typisches Problem der linearen Optimierung behandelt ein einfaches Modell eines Produktionsprozesses und deren optimale Steuerung. Entschieden werden soll, in welcher Menge die verschiedenen Produkte, die im Prinzip herstellbar sind, tatsächlich produziert werden. Zu berücksichtigen sind dabei sowohl die Kapazitätsgrenzen der benötigten Ressourcen – etwa Arbeitskräfte, Maschinen und Rohstoffe – als auch die Überschüsse, die bei den Produkten über die entstehenden Kosten hinaus erlöst werden können. Sehen wir uns ein ganz einfaches Beispiel an:

Mit Hilfe der Ressourcen A, B, C und D werden zwei Produkte X und Y hergestellt, deren Einheiten mit den Zahlen x und y gemessen werden. Bekannt sind

• die mit den Produkten X und Y erzielbaren Überschüsse, nämlich 2 Geldeinheiten pro Wareneinheit des Produktes X und 3 Geldeinheiten pro Wareneinheit Y, das heißt, man erhält insgesamt einen Überschuss in Höhe von

Gesamtüberschuss =
$$2x + 3y$$
,

sowie

- der Bedarf an den Ressourcen und deren Kapazitätsgrenzen. Diese werden mit Hilfe von Ungleichungen formuliert:
 - Benötigt man von der Ressource A eine Einheit zur Herstellung einer Einheit des Produktes X und vier Einheiten zur Produktion einer Y-Einheit, und
 - stehen 24 Einheiten der Ressource A zur Verfügung,

dann ergibt sich daraus die Ungleichung

$$x + 4y \le 24.$$

Für die anderen Ressourcen gehen wir von analogen Beschränkungen aus:

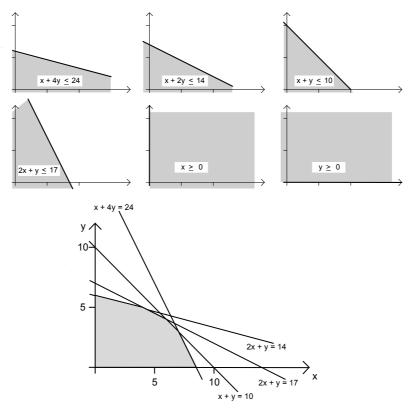
bei B: $x + 2y \le 14$, bei C: $x + y \le 10$, bei D: $2x + y \le 17$.

• Schließlich müssen noch die in praktischen Anwendungen, nicht aber im Modell selbstverständlichen Bedingungen

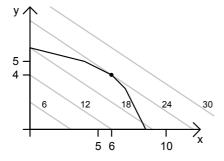
$$x \ge 0$$
 und $y \ge 0$

berücksichtigt werden.

Einfache Situationen wie die unseres Beispiels lassen sich am besten graphisch verdeutlichen. Dazu trägt man die möglichen Produktionspläne, die durch die Produktionsmengen x und y charakterisiert werden, in ein Koordinatensystem ein. Zulässig und damit bei der Optimierung zu erwägen sind alle Zahlenpaare (x, y), die sämtliche sechs Ungleichungen, **Nebenbedingungen** genannt, erfüllen. Jede dieser Ungleichungen entspricht einer Halbebene, das heißt einem durch eine Gerade abgegrenzten Bereich der Ebene; die Lage dieser Gerade ergibt sich jeweils dadurch, dass man das Größer-oder-Gleich-Zeichen der betreffenden Ungleichung durch ein Gleichheitszeichen ersetzt. Bildet man den mengentheoretischen Durchschnitt aller sechs Halbebenen, erhält man so das geometrische Äquivalent zu allen zulässigen Produktionsplänen.



Wie verhält sich nun der Überschuss innerhalb des so veranschaulichten Bereichs aller möglichen Produktionspläne? Wo erreicht er seinen größten Wert? Um dies zu erkennen, stellt man am besten auch den Überschuss graphisch dar. Man erhält dann eine Schar von Niveau-Geraden, die jeweils einem bestimmten Überschusswert entsprechen. In der folgenden Graphik sind die fünf Geraden zu den Überschüssen von 6, 12, 18, 24 und 30 grau eingezeichnet.



An Hand der Graphik erkennt man sofort, dass der maximal erreichbare Wert 24 beträgt und dass der zugehörige Produktionsplan, der geometrisch einer Ecke des zulässigen Bereichs entspricht, daraus besteht, x = 6 und y = 4 Einheiten der beiden Produkte X beziehungsweise Y herzustellen.

Der Simplex-Algorithmus

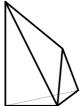
Die Idee von Dantzigs Simplex-Algorithmus basiert auf der geometrischen Deutung einer linearen Optimierungsaufgabe. Allerdings werden die geometrischen Eigenschaften, soweit sie innerhalb des Algorithmus eine Rolle spielen, stets rein algebraisch charakterisiert: So haben wir bereits gesehen, dass man für lösbare Probleme stets ein Maximum finden kann, bei dem es sich um eine Ecke handelt. Was ist aber eine Ecke? Das heißt, wie wird eine Ecke algebraisch charakterisiert und wie kann sie berechnet werden?

Sehen wir uns zunächst den Rand des zulässigen Bereichs an, das heißt die Punkte, die noch ganz "knapp" dazu gehören. Ein solcher Randpunkt wird algebraisch dadurch charakterisiert, dass bei zumindest einer Größer-oder-gleich-Nebenbedingung die Gleichheit gilt. Bei Ecken und anderen "besonderen" Randpunkten müssen bei den Nebenbedingungen entsprechend mehr Identitäten gelten. Die nächste Graphik verdeutlicht dies für zwei einfache Beispiele, bei denen der zulässige Bereich zwei- beziehungsweise dreidimensional ist.

²⁴⁸ Interview in Donald J. Albers, Gerald J. Albers, Constance Reid (ed.), *More mathematical people*, San Diego 1990, S. 73-77.







Seitenflächen: mind. eine Gleichheitsbeziehung
Kanten: mind. zwei Gleichheitsbeziehungen
Ecken: mind. drei Gleichheitsbeziehungen

Man könnte nun versuchen, auf der Suche nach dem Optimum alle Ecken des zulässigen Bereiches durchzuprobieren: Dabei lassen sich die Ecken dadurch bestimmen, dass man jeweils in genügend vielen Nebenbedingungen eine Gleichheit vorschreibt, um dann das so entstehende Gleichungssystem zu lösen. Ist ein solches Gleichungssystem lösbar und sind alle Nicht-Negativitätsbedingungen erfüllt, liegt eine Ecke vor. Hat man alle Ecken auf diesem Weg bestimmt, sucht man schließlich unter den zugehörigen Zielwerten den größten heraus. Da bei größeren Optimierungsaufgaben die Zahl der Ecken sehr schnell anwächst, ist eine solche Vorgehensweise kaum praktikabel. Deutlich besser geeignet ist das folgende, schrittweise arbeitende Verfahren:

Ausgehend von einer bereits zuvor erreichten Ecke werden die von dort ausgehenden Kanten darauf untersucht, wie sich die Zielfunktion längs dieser Richtungen ändert. Verläuft keine Kante in eine Richtung, bei der sich die Zielfunktion erhöht, liegt das Maximum bereits vor. Ansonsten wählt man eine Kante mit einer Steigerung und bewegt sich darauf bis zur gegenüberliegenden Ecke. Rechnerisch geschieht das dadurch, dass bei den Nebenbedingungen eine Gleichheitsbeziehung aufgegeben und dafür eine andere zusätzlich gefordert wird. Der Schritt wird daher auch **Austausch-Schritt** genannt.

Bei der rechnerischen Umsetzung der geometrisch erläuterten Idee ist allerdings zu beachten, dass Größer-oder-Gleich-Beziehungen algebraisch schwer zu handhaben sind. Daher werden die Ungleichungen mit Hilfe von zusätzlichen Variablen, so genannten **Schlupfvariablen**, zu Gleichungen umgeformt, und diese werden Schritt für Schritt nach jeweils einer Auswahl von Variablen aufgelöst. Jede solche Auflösung entspricht einer Ecke, und zwar insofern, dass die Eigenschaften der Optimierungsaufgabe im Nahbereich um diese Ecke besonders deutlich werden. Wir schauen uns dies anhand des Beispiels an, welches im ersten Kasten erörtert wurde:

$$Z = 2x +3y$$

$$u_1 = 24 - x - 4y$$

$$u_2 = 14 - x - 2y$$

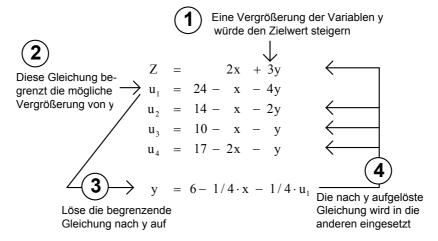
$$u_3 = 10 - x - y$$

$$u_4 = 17 - 2x - y$$

Die Bezeichnung Z steht für das zu optimierende Ziel, das heißt den zu maximierenden Überschuss. Über die vier aufgeführten Nebenbedingungen hinaus müssen alle Variablen einschließlich der hinzugekommenen Schlupfvariablen u₁, u₂, u₃ und u₄ mindestens gleich 0 sein:

$$x \ge 0$$
, $y \ge 0$, $u_1 \ge 0$, $u_2 \ge 0$, $u_3 \ge 0$, $u_4 \ge 0$

Diese Ausgangsform der Nebenbedingungen entspricht der Ecke (x,y)=(0,0). Deutlich sichtbar ist, dass das Ziel Z gegenüber dem erreichten Wert noch verbessert werden kann. Dazu kann sowohl die Variable x als auch y im bestimmten Rahmen vergrößert werden, ohne dass dabei eine Nebenbedingung verletzt wird. Beim Simplex-Algorithmus wird allerdings pro Schritt immer nur eine einzige Variable dafür ausgewählt, ausgehend vom Wert 0 vergrößert zu werden. Da bei gleicher Vergrößerung die Variable y eine größere Steigerung des Ziels bringt, entscheiden wir uns dafür, die Variable y zu vergrößern. Wie weit ist dies aber möglich? Ein Blick auf die vier Gleichungen zeigt, dass bei y=6 Schluss ist, da dann die Variable u_1 den Wert 0 erreicht, während die anderen Variablen u_2 , u_3 , u_4 noch positiv sind. Um bei der so berechneten Ecke mit x=0 und y=6 wie zuvor bei der ersten Ecke das Verhalten des Ziels analysieren zu können, wird die zweite, das ist die die Vergrößerung von y begrenzende, Gleichung nach y aufgelöst und das Ergebnis in die anderen vier Gleichungen eingesetzt:



Geometrisch entspricht die so entstehende Form des Gleichungssystems einem Koordinatensystem mit dem Punkt (x, y) = (0, 6) als Ursprung und den Achsen x und u_1 . Rein algebraisch handelt es sich einfach um eine Äquivalenzumformung des Gleichungssystems, um so Zielwert und Nebenbedingungen relativ zu einem anderen Basispunkt studieren zu können. Als Ergebnis erhält man:

$$Z = 18 + 5/4 \cdot x - 3/4 \cdot u_1$$

$$y = 6 - 1/4 \cdot x - 1/4 \cdot u_1$$

$$u_2 = 2 - 1/2 \cdot x + 1/2 \cdot u_1$$

$$u_3 = 4 - 3/4 \cdot x + 1/4 \cdot u_1$$

$$u_4 = 11 - 7/4 \cdot x + 1/4 \cdot u_1$$

Aus der ersten Gleichung erkennt man sofort, dass eine weitere Vergrößerung des Ziels nur dann erreicht wird, wenn die Variable x über 0 hinaus wächst. Wie weit dies höchstens möglich ist, ohne dass eine Variable negativ wird, das gibt die dritte Gleichung vor, nämlich bis zum Wert x=4. Wieder wird die diese Grenze vorgebende Gleichung nach der zu vergrößernden Variablen x aufgelöst und dann in die anderen Gleichungen eingesetzt. Man erhält:

3.5 Minimax und Lineare Optimierung: So einfach wie möglich

Gesucht ist eine möglichst einfache Methode, mit der Minimax-Strategien für beide Spieler eines als Normalform gegebenen Zwei-Personen-Nullsummenspiels berechnet werden können.

Der im letzten Kapitel erwähnte Weg, zur Berechnung von Minimax-Strategien ein gegebenes Spiel zunächst zu symmetrisieren, führt bei einer Normalform mit n Zeilen und m Spalten zu einer linearen Optimierungsaufgabe mit m+n+1 Variablen und m+n+2 weiteren Schlupfvariablen. Da die Größe des Optimierungsproblems wesentlich den zur Lösung notwendigen Aufwand bestimmt, stellt sich natürlich die Frage, ob man die Minimax-Strategien auch mit Hilfe einer weniger umfangreichen Optimierungsaufgabe berechnen kann. Dies ist in der Tat so. Am einfachsten ist ein Verfahren, das 1960 von Albert W. Tucker (1905-1995), einem der Pioniere der Linearen Optimierung und Spieltheorie, vorgestellt wurde 250 . Tuckers Ansatz kommt mit nur m Variablen und n weiteren Schlupfvariablen aus. Wir wollen ihn an Hand eines Beispiels demonstrieren. Wir greifen dabei auf ein bereits in Kapitel 3.2 diskutiertes Spiel zurück:

Schwarz wählt Weiß wählt	1	2	3	4
1	2	-1	1	2
2	-1	1	0	1

Auf der Suche nach Minimax-Strategien für Weiß und Schwarz stellen wir zunächst zwei lineare Optimierungsaufgaben auf, deren Lösungen die gewünschten Minimax-Strategien beinhalten. Wir beginnen mit dem maximierenden Spieler Weiß, der seine beiden Strategien zufällig mit zwei Wahrscheinlichkeiten x_1 und x_2 mischt, um sich so eine möglichst hohe Gewinnerwartung zu sichern. Rein formal sind also zwei Zahlen x_1 und x_2 gesucht, für die unter den Bedingungen

²⁵⁰ A. W. Tucker, *Solving a matrix game by linear programming*, IBM Journal of Research and Development, 4 (1960), S. 507-517.

$$2x_{1} -x_{2} \ge v$$

$$-x_{1} +x_{2} \ge v$$

$$x_{1} \ge v$$

$$2x_{1} +x_{2} \ge v$$

$$x_{1} +x_{2} = 1$$

$$x_{1} \ge 0, x_{2} \ge 0$$

ein maximaler Wert v erzielt wird:

$$v = Max!$$

Entsprechend versucht Schwarz, vier Zahlen y₁, y₂, y₃ und y₄ zu bestimmen, die unter den Bedingungen

einen möglichst kleinen Wert v ermöglichen:

$$v = Min!$$

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, die beiden formulierten Problemstellungen in die Standardform einer linearen Optimierungsaufgabe zu transformieren. Der direkteste Weg besteht darin, den jeweils zu optimierenden Wert v als Variable aufzufassen. Der von Tucker vorgeschlagene Weg kommt allerdings mit einer Variablen und einer Nebenbedingung weniger aus. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Wert des Spiels, das heißt das in den beiden Optimierungsaufgaben erreichbare Maximum beziehungsweise Minimum, positiv ist. Für das hier betrachtete Spiel ist das aufgrund der Untersuchungen in Kapitel 3.2 gesichert²⁵¹, ansonsten wird einfach ein genügend hoher Bonus für Weiß festgesetzt, so dass alle Einträge der Normalform positive Werte annehmen. In Folge können die Variablen nur dann nahezu optimale Werte erbringen, wenn v positiv ist. Für diese Werte ist es daher erlaubt, einzelne Ungleichungen durch v zu dividieren, wovon bei denjenigen Ungleichungen Gebrauch gemacht wird, bei denen v auf der rechten Seite steht. Anschließend werden die Variablen durch andere ersetzt:

$$X_1 = \frac{x_1}{v}, \ X_2 = \frac{x_2}{v}, \ Y_1 = \frac{y_1}{v}, \ Y_2 = \frac{y_2}{v}, \ Y_3 = \frac{y_3}{v}, \ Y_4 = \frac{y_4}{v}$$

Zusammen mit den zusätzlichen Schlupfvariablen X₃, ..., X₆, Y₅ und Y₆, mit deren Hilfe die Ungleichungen zu Gleichungen werden, erhält man die folgenden Optimierungsaufgaben:

Unter den Nebenbedingungen

$$\begin{split} X_3 &= -1 + 2X_1 - X_2 \\ X_4 &= -1 - X_1 + X_2 \\ X_5 &= -1 + X_1 \\ X_6 &= -1 + 2X_1 + X_2 \end{split}$$

²⁵¹ Von einem positiven Wert kann man sich auch direkt überzeugen, wenn Weiß seine beiden Strategien im Verhältnis 2 zu 3 zufällig mischt.

Simplex-Tableaus und Rechteckregel

Beim Simplex-Algorithmus hat es sich aus verschiedenen Gründen bewährt, Simplex-Tableaus zu verwenden: Was beim manuellen Rechnen die Schreibarbeit verringert, ermöglicht bei einer Programmierung die direkte Umsetzung von Datenorganisation und -manipulation. Last not least können aber zwei Sachverhalte gleichzeitig dargestellt werden. Sehen wir uns dazu zunächst ein **Simplex-Tableau** an, das allgemein die folgende Form aufweist.

Ohne einen Verlust an Allgemeinheit können wir uns auf 2×2-Tableaus beschränken, womit sich die vielen Auslassungs-Pünktchen "..." erübrigen. Das Tableau steht dann für die *beiden* Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ll} A=p\cdot (-C) \ +z\cdot (-D) & \alpha=p\gamma \ +s\delta \\ B=s\cdot (-C) +r\cdot (-D) & \text{und} & \beta=z\gamma \ +r\delta \end{array}$$

Mit dieser Interpretation wird klar, wie ein Simplex-Tableau umgeformt werden darf. So dürfen Zeilen untereinander und Spalten untereinander beliebig vertauscht werden, wenn dabei auch die am Rand aufgeführten Variablen mitgetauscht werden. Wichtiger aber ist der Austausch einer Spalte gegen eine Zeile. Dieser Austausch entspricht der Umformung, wie sie in jedem Schritt des Simplex-Algorithmus stattfindet. Für $p \neq 0$ werden dazu die jeweils ersten Gleichungen beider Systeme nach C beziehungsweise γ aufgelöst. Das Ergebnis wird anschließend in die andere Gleichung eingesetzt:

$$C = \frac{1}{p} \cdot (-A) + \frac{z}{p} \cdot (-D) \qquad \gamma = \frac{1}{p} \cdot \alpha - \frac{s}{p} \cdot \delta$$

$$B = -\frac{s}{p} \cdot (-A) + (r - \frac{sz}{p}) \cdot (-D) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{z}{p} \cdot \alpha + (r - \frac{sz}{p}) \cdot \delta$$

Man sieht, dass die umgeformten Gleichungssysteme wieder *ein gemeinsames* Simplex-Tableau ergeben:

$$\gamma = \beta = C = 1/p \quad z/p \quad \alpha
B = -s/p \quad r - sz/p \quad \delta
\cdot (-A) \quad \cdot (-D)$$

Statt Gleichungssysteme umzuformen, kann man also immer mit Simplex-Tableaus rechnen. Die allgemeinen Regeln dazu sind:

- Die im Schnittpunkt der getauschten Zeile und Spalte stehende Zahl, das so genannte **Pivotelement** ("p"), wird durch seinen reziproken Wert ersetzt.
- Die anderen Zahlen der Pivotzeile ("z") werden durch das Pivotelement dividiert.
- Die anderen Zahlen der Pivotspalte ("s") werden mit umgekehrten Vorzeichen durch das Pivotelement dividiert.
- Bei den restlichen Zahlen ("r") folgt man der so genannten Rechteckregel, wozu man das Rechteck bildet, welches durch das Pivotelement und die aktuell zu transformierende Zahl festgelegt wird: Auf Basis der vier an den Ecken dieses Rechtecks stehenden Zahlen berechnet man mittels der Formel r sz/p den neuen Wert.
- Die am Rande stehenden Variablen werden zwischen Pivotzeile und -spalte getauscht. Dabei ist beim Tausch vom linken zum unteren Rand und umgekehrt das Vorzeichen zu ändern.

Im Simplex-Tableau nicht berücksichtigt sind die Nicht-Negativitäts-Bedingungen. Beim Simplex-Algorithmus wird diesen Bedingungen indirekt Rechnung getragen, nämlich sowohl durch das Start-Tableau als auch die Pivotwahl, das heißt bei der Auswahl der miteinander zu tauschenden Zeile und Spalte.

Bevor wir mit dem eigentlichen Simplex-Algorithmus beginnen, wollen wir noch das Anfangstableau inhaltlich interpretieren: Die dem Tableau entsprechenden Parameterwerte ergeben sich, wenn alle unten und rechts stehenden Variablen gleich 0 sind. Dabei erfüllen nur

3.6 Play it again: Aus Erfahrung klug?

Reicht allein Erfahrung im Spiel dazu aus, gute Spielstrategien zu finden? Konkret: Lässt sich zu jedem gegebenen Zwei-Personen-Nullsummenspiel eine Serie von Partien organisieren, mit der Minimax-Strategien empirisch bestimmt werden können?

Wohl nur wenige Spieler dürften ihre Strategie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus optimieren. Schließlich sind die meisten gebräuchlichen Spiele auch viel zu komplex, um solche Berechnungen wirklich durchführen zu können. Lassen sich gute Strategien aber auch ohne solche Berechnungen finden? Reicht eine gewachsene Spieltradition dazu aus, gute Strategien allein auf Basis eines trial-and-error-Prinzips evolutionär entstehen zu lassen?

Gemischte Strategien sind, das muss zunächst gesagt werden, vielen Spielern genauso fremd, wie sie es den Mathematikern Jahrhunderte lang waren. Von Skatspielern nach dem Motto "Du hättest auf jeden Fall zuerst das Ass ausspielen müssen" geführte Debatten entspringen nicht nur der Hitze des Gefechts, sondern sind zugleich ein Indiz dafür, dass Verhaltensweisen für eindeutig vergleichbar gehalten werden - gemischte Strategien wären dann überflüssig. Der Grund für solche Einschätzungen ist weniger darin zu suchen, dass Minimax-Strategien nicht unbedingt die höchste Schule des Spiels darstellen, weil damit auf erkennbar schlechte Spielweisen des Gegners meist nur unzureichend reagiert wird. Vielmehr gibt es in der Spielpraxis oft weit wichtigere Dinge, als optimale Wahrscheinlichkeiten für die Zugmöglichkeiten zu finden. Wer jemals gegen einen ausgefuchsten Skatspieler gespielt hat, wird das bestätigen: Im Gedächtnis nachgehalten werden nicht nur die erreichten Punkte und die ausgespielten Trümpfe, sondern der gesamte bisherige Spielverlauf vom Reizen bis zu jedem einzelnen Stich - von hilfreichen Beobachtungen am Rande, wie ein Anfänger seine Karten immer in der gleichen Weise sortiert, einmal ganz abgesehen. Für den durchschnittlichen Spieler gibt es also genug Möglichkeiten, seine Spielweise dadurch zu perfektionieren, dass er die prinzipiell zugängliche Information vollständig auswertet. Bevor diese Stufe nicht erreicht ist, macht es wenig Sinn, dem unüberwindbaren Unwissen mit einer gemischten Strategie zu trotzen.

Dagegen gehören gemischte Strategien bei anderen Spielen, insbesondere bei deutlich strategisch geprägten wie Pokern, ganz selbstverständlich zur Spielpraxis. Auf der Basis empirischer Erfahrung können also durchaus gemischte Strategiekonzepte hervorgebracht werden. Sind dabei Simulationsreihen von Partien denkbar, mit denen sogar Minimax-Strategien empirisch bestimmt werden können?

In unseren Betrachtungen gehen wir wieder von einem in Normalform vorliegenden Zwei-Personen-Nullsummenspiel aus. Wir veranstalten nun eine Serie von Partien, innerhalb der beide Spieler danach streben, ihre Strategien sukzessive zu verbessern. Dabei wird jede einzelne Partie nach den normalen Regeln gespielt. Insbesondere werden deshalb in den Einzelpartien nur reine Strategien verwendet. Gemischte Strategien treten nur indirekt, nämlich als relative Häufigkeiten auf, mit der die reinen Strategien innerhalb der bisherigen Partien gewählt wurden. Um möglichst gut zu spielen, gehen die beiden Spieler – so unsere Annahme – folgendermaßen vor: Zu Beginn einer Partie wertet jeder Spieler die bisherige Verhaltensweise seines Gegners aus und interpretiert sie als gemischte Strategie, die dieser auch weiterhin verwenden wird und die daher bestmöglich zu kontern ist. Das heißt, jeder Spieler sucht eine reine Strategie, die gegen die bisherige Durchschnittsstrategie des Gegners das

beste Resultat bringt. George J. Brown, der dieses Verfahren einer fiktiven Partienserie 1949 entwickelte, bemerkte dazu²⁵²:

Das iterative Verfahren kann ungefähr dadurch charakterisiert werden, dass es auf der traditionellen Philosophie der Statistik beruht, zukünftige Entscheidungen auf der Basis der dafür relevanten Vergangenheit zu treffen. Stellen Sie sich zwei Statistiker vor, die vielleicht ohne Kenntnis der Minimax-Theorie mehrere Partien austragen. Man darf natürlich erwarten, dass sich ein Statistiker an der Spielweise seines Gegners in den vorangegangenen Partien orientiert und sich bei Verzicht auf kompliziertere Berechnungen vielleicht dazu entscheidet, in jeder Partie diejenige reine Strategie zu wählen, die optimal ist gegen das der bisherigen gegnerischen Spielweise entsprechende Strategie-Mix.

Wir wollen uns die Vorgehensweise zunächst anhand eines Beispiels anschauen. Als Beispiel greifen wir auf das in Kapitel 3.3 untersuchte Poker-Modell zurück:

Schwarz wählt Weiß wählt	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	2	0	3	1
3	6	1	4	-1
4	8	1	7	0

Sehen wir uns nun an, wie die Partien konkret verlaufen:

- 1. Bei der ersten Partie besitzen beide Spieler noch keine Anhaltspunkte über die Spielweise des Gegners. Da wir generell annehmen wollen, dass sich die Spieler bei Strategien mit gleich guten Aussichten immer für diejenige mit der kleinsten Nummer entscheiden, wählen sie in der ersten Partie beide ihre erste Strategie.
- 2. Bei der zweiten Partie geht jeder der beiden Spieler davon aus, dass der Gegner seine in der ersten Partie verwendete Strategie beibehält. Für Weiß ist damit die Sache klar, dass er sich für seine vierte Strategie entscheiden muss. Dagegen ergeben bei Schwarz alle vier Strategien den gleichen Erfolg und Schwarz entscheidet sich daher nochmals für seine erste Strategie.
- 3. Bei der dritten Partie wird das Bild bereits etwas abwechslungsreicher. Zwar muss sich Weiß wieder für seine vierte Strategie entscheiden, da Schwarz bisher nur die Strategie "1" gewählt hat. Schwarz dagegen vermutet bei Weiß eine gemischte Strategie, bei der die reinen Strategien "1" und "4" im Verhältnis 1:1 zufällig gemischt sind. Die Gewinnerwartung von Weiß beträgt demnach, je nachdem wie Schwarz kontert, 4, ½, 3½ beziehungsweise 0. Schwarz wählt daher seine Strategie "4".
- 4. Zu Beginn der vierten Partie planen die Spieler unter den folgenden Annahmen: Weiß geht davon aus, dass Schwarz seine Strategie "1" und "4" zufällig im Verhältnis 2:1 mischt, während Schwarz seinem Gegner eine zufällige Mischung der Strategien "1" und "4" im Verhältnis 1:2 unterstellt. Auf dieser Basis entscheiden sich beide Spieler für ihre vierte Strategie.

²⁵² G. W. Brown, *Iterative solutions of games by fictitious play*, in: T. C. Koopmanns (ed.), *Activity analysis of production and allocation*, Cowles Commission Conference Monograph 13, New York 1951, S. 374-376.

3.7 Le Her: Tauschen oder nicht?

Weiß und Schwarz spielen darum, wer die höhere Karte erlangt. Gespielt wird mit einem normalen 52er-Blatt, für das die Rangfolge König, Dame, Bube, 10, 9, ... 3, 2, Ass gilt. Bei gleich hohen Kartenwerten gewinnt Schwarz.

Zu Beginn erhält jeder Spieler eine Karte, und eine weitere wird verdeckt auf den Tisch gelegt. Anschließend bekommt jeder Spieler eine Chance, seinen Kartenwert zu verbessern. Weiß beginnt und darf dabei den Austausch seiner Karte mit Schwarz verlangen. Sofern Schwarz keinen König auf der Hand hält, muss er sich einem gewünschten Tausch fügen. Unabhängig davon, wie die erste Tauschmöglichkeit verlaufen ist, erhält nun Schwarz seine Chance: Dabei darf er seine Karte mit der verdeckt auf dem Tisch liegenden Karte tauschen, wobei auch er einen König zurücklegen muss. Anschließend legen die beiden Spieler ihre Karten auf den Tisch und rechnen ab.

Welche Karten sollten die Spieler tauschen und welche nicht?

Das beschriebene Spiel wurde unter dem französischen Namen "Le Her" im 18. Jahrhundert gespielt. Im Vergleich zu den bisher auf gemischte Minimax-Strategien untersuchten Spielen weist es eine deutlich höhere Komplexität auf: So umfasst eine Strategie von Weiß 13 beliebig miteinander kombinierbare Einzelentscheidungen. Für jeden Kartenwert ist nämlich zu planen, ob bei diesem Wert getauscht werden soll oder nicht. Insgesamt besitzt Weiß daher 2^{13} reine Strategien. Die Planungen von Schwarz sind sogar noch etwas vielfältiger, da bei der Entscheidungsfindung nicht nur die eigene Karte, sondern auch der Verlauf des ersten Zuges zu berücksichtigten ist.

Trotz der hohen Komplexität des Spiels Le Her lassen sich relativ einfach Minimax-Strategien angeben. Sie bringen Weiß eine Gewinnerwartung von 0,0251, was einer Gewinnwahrscheinlichkeit von 0,5125 entspricht:

Weiß

- tauscht alle Karten bis einschließlich Sechs,
- tauscht eine Sieben mit der Wahrscheinlichkeit von 3/8 und
- hält alle Karten ab Acht aufwärts.

Schwarz:

- Im Fall, dass Weiß zuvor auf einen Tausch verzichtet hat, tauscht Schwarz
 - alle Karten bis einschließlich Sieben,
 - eine Acht mit der Wahrscheinlichkeit von 5/8 und
 - höhere Karten nie.
- Hat sich Weiß zuvor zu einem Tausch entschieden, dann tauscht Schwarz genau dann, wenn seine Karte schlechter ist als die ihm bekannte Karte von Weiß.

Was gerade das Spiel Le Her so interessant macht, ist die Tatsache, dass die gerade beschriebenen Minimax-Strategien bereits 1713 entdeckt wurden, also mehr als zweihundert Jahre vor den systematischen Untersuchungen von Borel und von Neumann! Über den Entdecker ist nur wenig bekannt. Es handelt sich um einen Engländer mit Namen Waldegrave, der wahrscheinlich damals in Paris lebte. Auf Le Her aufmerksam wurde Waldegrave durch Pierre Rémond de Montmort (1678-1719). Dieser hatte 1708 sein Buch Essay d'analyse sur les jeux de hasard über Glücksspiel-Probleme veröffentlicht und darin auch die Frage nach der besten Spielweise bei Le Her gestellt. Welche Schwierigkeiten dieses Problem bereitete, geht aus einem Briefwechsel hervor, den Montmort in den folgenden Jahren mit Niklaus Bernoulli (1687-1759) führte, einem Neffen von Jakob Bernoulli, dem Entdecker des Gesetzes der großen Zahlen. Immerhin 16 zwischen 1711 und 1715 datierte Briefen enthalten Überlegungen zum Spiel Le Her²⁵⁶. In dem Briefwechsel dokumentiert sind auch die Vorschläge, die Waldegrave Montmort unterbreitete. Die zentrale Idee Waldegraves geht aus einem Brief Montmorts an den sehr skeptischen Niklaus Bernoulli vom 15. November 1713 hervor, den Montmort als Anhang in die zweite Auflage seines Glücksspiel-Buches aufnahm²⁵⁷. Darin zitiert Montmort einen zwei Tage älteren Brief Waldegraves zum Thema Le Her²⁵⁸.

²⁵⁶ Siehe Julian Henny, Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem Briefwechsel mit Pierre Rémond de Montmort, Dissertation, Basel 1973, in: Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3, Basel 1975, S. 457-507; Robert W. Dimand, Mary Ann Dimand, The early history of the theory of strategic games from Waldegrave to Borel, in: E. Roy Weintraub (ed.), Toward a history of game theory, Durham 1992, S. 15-28; Robert W. Dimand, Mary Ann Dimand, The history of game theory, Volume 1, From the beginnings to 1945, London 1996, S. 120-123; Anders Hald, A history of probability and statistics and their applications before 1750, New York 1990, Chapter 18, insbes. 18.6.

²⁵⁷ Pierre Rémond de Montmort, Essay d'analyse sur les jeux de hasard, 2. Auflage, Paris 1713, Reprint New York 1980, S. 403-413; ferner: S. 321, 334, 338, 348, 361, 376.

²⁵⁸ Montmorts Brief liegt in Teilen auch in englischer Übersetzung vor: Harold Kuhn, James Walde-grave: Excerpt from a letter, in: William J. Baumol, Stephen M. Goldfeld (ed.), Precursors in mathematical economics: An anthology, Series of Reprints of Source Works in Political Economics, 19, London 1968, S. 3-9, Nachdruck: Mary Ann Dimand, Robert W. Dimand, The foundations of game theory, Cheltenham 1997, vol. I., S. 3-9.

Bernoulli, Montmort und Waldegrave waren sich für die meisten Spielsituationen völlig einig, wie am besten zu verfahren ist. Kontrovers blieb nur, was Weiß bei einer Sieben und Schwarz bei einer Acht – wenn Weiß zuvor auf einen Tausch verzichtet hat – am besten tut. Diese beiden Einzelentscheidungen haben nämlich Eigenschaften, wie wir sie vom Spiel "Gerade oder ungerade" her kennen: Es gibt keinen absolut besten Zug. Welcher Zug gut oder schlecht ist, hängt ganz davon ab, wie sich der Gegner in der anderen Situation entscheidet. Waldegrave schlägt daher vor, die Entscheidungen zufällig zu treffen. Konkret stellt er sich vor, dass für jede Entscheidung ein Jeton aus einem zweifarbigem Vorrat gezogen wird. Je nach Farbe des gezogenen Jetons wird dann getauscht oder nicht. Waldegrave geht bei Weiß von einem Vorrat von a Jetons für "tauschen" und b Jetons für "nicht tauschen" und bei Schwarz von einem Vorrat von c Jetons für "tauschen" und d Jetons für "nicht tauschen" aus. Mit umfangreichen kombinatorischen Überlegungen lässt sich dann die dazugehörige Gewinnwahrscheinlichkeit für Weiß berechnen. Sie beträgt:

$$\frac{2828ac + 2834bc + 2838ad + 2828bd}{13 \cdot 17 \cdot 25(a+b)(c+d)}$$

Diese Formel, die in den ersten Abschnitten von Montmorts Brief steht²⁵⁹, dient Waldegrave als Ausgangspunkt für seine Überlegungen. Er erkennt, dass es bei einem Strategie-Mix von Weiß mit den Werten a = 3 und b = 5 nicht darauf ankommt, ob Schwarz seine Siebenen tauscht. Weiß gewinnt dann stets mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525 \cdot 4}$$

Fixierbar ist diese Wahrscheinlichkeit, dass Weiß gewinnt, ebenso durch Schwarz, der dazu nach Waldegrave die Werte c = 5 und d = 3 verwenden kann. Dann ist es ohne Bedeutung, wie sich Weiß bei einer Sieben entscheidet. Andere Verhältnisse hält Waldegrave für riskant. Bezogen auf den Spieler Weiß, den er Paul nennt, bemerkt er:

Es ist wahr, dass für alle von a = 3 und b = 5 abweichenden Werte von a und b Paul (Weiß) seinen Anteil vergrößern kann, wenn Peter (Schwarz) die falsche Wahl trifft. Aber er wird sich auch verschlechtern, wenn Peter (Schwarz) die richtige Wahl trifft ...

Am einfachsten lässt sich Waldegraves Ergebnis nachvollziehen, wenn man die Gewinnwahrscheinlichkeit für Weiß in Abhängigkeit der beiden Wahrscheinlichkeiten p = a/(a+b) und u = c/(c+d) ausdrückt:

$$\frac{11327 - (8p - 3)(8u - 5)}{22100}$$

Sofort wird ersichtlich, dass Weiß das sich aus der gegnerischen Entscheidung ergebende Risiko nur mit dem Wert p = 3/8 unterbinden kann. Gleiches ist auch Schwarz möglich, und zwar einzig mit der Wahrscheinlichkeit u = 5/8.

Waldegraves Erkenntnisse fanden bei seinen Zeitgenossen angefangen mit Bernoulli wenig positive Resonanz²⁶⁰. Immerhin fielen sie dank Montmorts Buch nicht in Vergessenheit. So

²⁵⁹ Montmort (Fußnote 257), S. 404, wobei der Nenner in die heute übliche Notation übertragen wurde

²⁶⁰ Immerhin hat Bernoulli Waldegraves Ideen später mit Vorbehalt aufgenommen und auf dieser Basis sogar selbst ein einfaches Spiel gelöst. Es handelt sich um eine Variante des Spiels "Gerade oder Ungerade":

3.8 Zufällig entscheiden – aber wie?

Ein Spieler realisiert eine gemischte Strategie, indem er zu Beginn einer Partie eine einzige Zufallsentscheidung darüber herbeiführt, die sein gesamtes Verhalten innerhalb der nachfolgenden Partie festlegt. Kann das zufällige Spielerverhalten einer Minimax-Strategie auch Zug für Zug organisiert werden? Das heißt, lässt sich jeder anstehende Zug durch eine separate Zufallsentscheidung ermitteln?

Die Frage ist keineswegs so akademisch, wie sie vielleicht scheint. Erinnern wir uns nochmals an das im letzten Kapitel untersuchte Spiel Le Her. Aus praktischer Sicht hat ein Spieler bei seiner Planung 13 verschiedene, durch den eigenen Kartenwert bestimmte Situationen abzuwägen und dafür Ja-Nein-Entscheidungen zu fällen. Um vom Gegner nicht durchschaut werden zu können, tut ein Spieler gut daran, sein strategisches Konzept zufällig zu variieren. Statt eine gemischte Strategie "global" dadurch zu planen, dass er für die 2¹³ = 8192 reinen Strategien eine Wahrscheinlichkeitsverteilung wählt, ist es für den Spieler einfacher, sich 13 "lokale" Wahrscheinlichkeiten vorzugeben, nämlich für jede Entscheidungssituation eine. Sobald er an der Reihe ist, "würfelt" er seinen Zug auf der Basis der betreffenden Wahrscheinlichkeit aus. Das heißt konkret: Ob der Spieler bei einer bestimmten Karte tauscht oder nicht, entscheidet er zufällig, und zwar auf Grundlage der speziell dafür vorgesehenen Wahrscheinlichkeit. Eine solche Art von Handlungsplan, der für jede Einzelentscheidung eine

ganz bestimmte Zufallsentscheidung vorsieht, wird **Verhaltensstrategie** genannt. A priori überhaupt nicht selbstverständlich ist allerdings, ob das Konzept der Verhaltensstrategie umfassend genug ist, dass sich auf seiner Basis immer Minimax-Strategien finden lassen.

Erstmals angewendet wurden Verhaltensstrategien 1944 durch von Neumann und Morgenstern in ihrem Buch *Theory of games and economic behavior*²⁶⁴ bei einem Poker-Modell. Dort hat jeder der beiden Spieler auf der Basis seines eigenen Blattes darüber zu entscheiden, wie er im weiteren Verlauf bieten will. Wieder sind starre Handlungskonzepte in Form reiner Strategien wenig empfehlenswert, da sie dem Gegner gezielte Gegenmaßnahmen erlauben. Wie aber lassen sich gemischte Strategien praxisgerecht realisieren? Kann das wie beim Spiel Le Her mit einer Verhaltensstrategie geschehen, das heißt, ist es dem Spieler möglich, sein Bietverhalten für jedes einzelne Blatt zufällig zu entscheiden? Am Beispiel des denkbar einfachsten Falles von nur zwei möglichen Blättern, nämlich einem starken und einem schwachen Blatt, sowie zwei erlaubten Geboten "hoch" und "tief" erläutern von Neumann und Morgenstern die typischen Erscheinungen:

Dann gibt es vier mögliche (reine) Strategien, denen wir Namen geben wollen:

"Gewagt": "Hoch" bieten bei jedem Blatt.

"Ängstlich": "Niedrig" bieten bei jedem Blatt.

"Normal": Hoch bieten bei starkem Blatt, "niedrig" bieten bei schwachem Blatt.

"Bluffen": Hoch bieten bei schwachem Blatt, "niedrig" bieten bei starkem Blatt.

Dann ist eine 50-50-Mischung von "Gewagt" und "Ängstlich" im Effekt dasselbe wie eine 50-50-Mischung von "Normal" und "Bluffen"; beide bedeuten, daß der Spieler – dem Zufall folgend – bei jedem Blatt im Verhältnis 50-50 "hoch" oder "niedrig" bieten wird. Trotzdem sind das in unserer jetzigen Bezeichnung zwei verschiedene "gemischte" Strategien …

Gemischte Strategien erlauben nämlich den "Luxus", nicht nur die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Entscheidungen, sondern auch die statistischen Abhängigkeiten zwischen diesen Einzelentscheidungen festlegen zu können. Natürlich ist zu fragen, ob solches in der Praxis überhaupt notwendig ist. Sicher nicht der Fall ist das bei Spielen wie dem untersuchten Poker-Modell, wo ein Spieler in einer einzelnen Partie höchstens eine der fraglichen Entscheidung zu fällen hat. Von Neumann und Morgenstern erläutern weiter:

Das heißt natürlich, daß unsere Bezeichnungen, die dem allgemeinen Fall vollkommen angepaßt sind, für viele spezielle Spiele zu weitschweifig sind. Das ist eine häufige Erscheinung bei mathematischen Untersuchungen mit allgemeinen Zielen.

Solange wir die allgemeine Theorie herausarbeiten, bestand kein Grund, dieser Weitschweifigkeit Rechnung zu tragen. Jedoch werden wir sie jetzt bei diesem Spiel beseitigen.

Tatsächlich gelingt es von Neumann und Morgenstern, optimale Verhaltensstrategien für ihr Poker-Modell zu finden. Gegenüber der Verwendung von gemischten Strategien bringt ihre Optimierung auf der Basis von Einzelentscheidungen eine wesentliche Vereinfachung: Bei der im Modell als beliebig angenommenen Zahl S von gleichwahrscheinlichen Kartenblättern, für die jeweils drei Möglichkeiten des Bietens offen stehen, sind statt für 3^S nur noch für 3S Wahrscheinlichkeiten optimale Werte zu suchen²⁶⁵.

²⁶⁴ John von Neumann, Oskar Morgenstern, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961 (amerikan. Orig. 1944), S. 194-198. Zitat: Fußnote zu Seite 197.

²⁶⁵ Berücksichtigt man außerdem, dass die Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsentscheidung die Sum-

Wenn ein Spieler zieht, so muss er dies allgemein auf der Grundlage der für ihn aktuell verfügbaren Information tun. Dabei handelt es sich im Vergleich zu der Information, welche die Spieler insgesamt besitzen, um einen je nach Spiel mehr oder minder großen Ausschnitt. Stimmen bei einem Spiel die Informationsstände der Spieler nicht ausnahmslos überein, spricht man von einem Spiel mit imperfekter Information. Bezogen auf einzelne Spielabläufe kann es dafür zwei Ursachen geben:

- Oft werden die Ergebnisse von Zufallseinflüssen direkt nur einem Teil der Spieler bekannt:
 - So kennt ein Spieler bei einem Kartenspiel meist nur seine eigenen Karten, nicht aber die der Gegner.
- Ebenso ist es keineswegs selbstverständlich, dass für einen Spieler die Handlungen seiner Kontrahenten ersichtlich sind:
 - Welche zwei Karten ein Alleinspieler beim Skat zu Beginn "drückt", das heißt verdeckt ablegt, wie viel Streichhölzer ein Spieler beim Knobeln in seine Hand nimmt oder wie ein Spieler bei einem Brettspiel wie Stratego oder Geister²⁶⁶ seine Spielfiguren, deren Typ aufgrund der neutralen Rückseiten nur ihm ersichtlich sind, zu Beginn aufstellt, alle diese Handlungen bleiben den Gegnern zunächst verdeckt.

Beide Ursachen lassen sich zusammenfassen, wenn man zufällige Spieleinflüsse als Züge eines fiktiven Spielers auffasst – dabei zieht der fiktive Spieler gemäß einer festen, den realen Spielern bekannten Verhaltensstrategie, die genau den Zufallsentscheidungen entspricht: Dann beruhen die eben angeführten Fälle von imperfekter Information alle darauf, dass ein Spieler bei seinem Zug nur zum Teil darüber informiert ist, wie die Spieler – sowohl die realen wie der fiktive – in den vorangegangenen Zügen gehandelt haben. Bedenkt man, dass der Verlauf einer Partie vollständig durch die Abfolge der Handlungen der Spieler einschließlich des fiktiven bestimmt wird, so wird ersichtlich, dass es keine weitere Ursache für die imperfekte Information gibt.

Der Charakter eines Spiels wird also maßgeblich dadurch bestimmt, wie umfassend ein zum Zug aufgeforderter Spieler darüber informiert ist, wie in der laufenden Partie bisher gezogen wurde. Dabei gibt es Informationsbestandteile, bei denen es eigentlich sehr plausibel ist, dass der Spieler sie kennt: Einerseits handelt es sich um die Informationen, von denen der Spieler bereits bei vorangegangen Zügen Kenntnis hatte, und andererseits um die Entscheidungen, die er selbst in diesen Zügen schließlich getroffen hat. Verfügt jeder Spieler stets über diese Informationen, das heißt, weiß jeder Spieler immer, was er zuvor tat und wusste, spricht man von einem Spiel mit perfektem Erinnerungsvermögen. Dass nicht jedes Spiel diese Eigenschaft besitzt, liegt weniger an der in der Praxis vorkommenden Vergesslichkeit von Spielern - diese bleibt hier aufgrund ihres nicht objektivierbaren Charakters unberücksichtigt -, sondern daran, dass ein "Spieler" im Sinne der hier angestellten Betrachtungen nicht unbedingt eine einzelne Person sein muss. Vorstellbar ist vielmehr auch, dass es sich bei einem "Spieler" um ein Team miteinander kooperierender Personen handelt, die zusammen versuchen, ihren gemeinsamen Gewinn zu maximieren. In diesem Fall steht, sofern die kooperierenden Partner ihr Wissen nicht austauschen dürfen, eine einmal vorhandene Information keineswegs bei allen späteren Zügen zur Verfügung. Als Beispiel kann wieder auf das Skatspiel

me 1 ergeben, dann reduziert sich die Parameteranzahl beim Übergang von gemischten Strategien zu Verhaltensstrategien noch deutlicher, nämlich von 3^S - 1 auf 2S.

²⁶⁶ Siehe Einführung, Fußnote 3.

3.9 Optimal handeln – effizient geplant

Bei Zwei-Personen-Nullsummenspielen mit perfektem Erinnerungsvermögen lassen sich Minimax-Strategien in Form von Verhaltensstrategien zumindest dann einfach beschreiben, wenn die Anzahl der möglichen Informationsmengen nicht zu groß ist. Der zur Berechnung notwendige Aufwand kann aber erheblich sein. In welchem Maße ist er begrenzbar?

Die zweifellos sehr allgemeine Fragestellung nehmen wir zunächst zum Anlass, die in den vorangegangenen Kapiteln erörterten Begriffe und Techniken nochmals zusammenzustellen, um danach einen Ausblick auf weitere Ergebnisse zu geben. Dabei werden wir unser Augenmerk insbesondere auf den Aufwand richten, der für die verschiedenen Verfahren notwendig ist.

Mit dem Simplex-Algorithmus haben wir zunächst eine Methode kennen gelernt, mit der sich Minimax-Strategien berechnen lassen. Allerdings ist in der Praxis die Anwendbarkeit auf solche Spiele beschränkt, deren Normalformen nicht zu umfangreich sind. So lässt sich selbst ein einfaches Spiel wie Le Her mit seinen etwa 8000 reinen Strategien kaum direkt untersuchen.

Vereinfachungen – zunächst ausschließlich bei der Beschreibung von Strategien – lassen sich erreichen, wenn man Verhaltensstrategien statt gemischter Strategien verwendet²⁷⁰. Bei ei-

²⁷⁰ Für Berechnungen sind Verhaltensstrategien allerdings denkbar schlecht geeignet, da die Gewinnerwartung in keiner linearen Abhängigkeit zu den Wahrscheinlichkeiten steht, welche die Verhaltensstrategien charakterisieren. Daher ist eine Verhaltensstrategie in formaler Hinsicht wesentlich schwerer zu handhaben als eine gemischte Strategie, deren Wahrscheinlichkeiten die Gewinnerwartung in linearer Weise beeinflussen. Die im weiteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellten Realisie-

ner Verhaltensstrategie entscheidet ein Spieler über seine zufälligen Handlungen "lokal", das heißt für jeden subjektiven Informationsstand einzeln. Daher kann eine Verhaltensstrategie zumeist durch weit weniger Wahrscheinlichkeiten charakterisiert werden als dies bei einer gemischten Strategie der Fall ist.

Obwohl Verhaltensstrategien in ihrer Gesamtheit weit weniger vielfältig sind als gemischte Strategien, ist ihr Konzept sehr universell: Zunächst gehört zu jeder gemischten Strategie eine Verhaltensstrategie. Um sie zu erhalten, wertet man für jede Informationsmenge, in welcher der betreffende Spieler zieht, einzeln aus, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spieler die verschiedenen Züge wählt. Gemäß dem Satz von Kuhn ist bei Spielen mit perfektem Erinnerungsvermögen die so konstruierte Verhaltensstrategie strategisch äquivalent zur gemischten Ausgangsstrategie, das heißt, man kann die Strategien austauschen, ohne dass sich dabei die Spielchancen ändern – die diversen Spielresultate, wie sie bei einer als fest, aber beliebig angenommenen Gegenstrategie möglich sind, ändern ihre Wahrscheinlichkeit nämlich nicht. Dabei ist die vorausgesetzte Eigenschaft eines perfekten Erinnerungsvermögens bei Einzelspielern – anders als bei Teams – im Idealfall stets vorhanden.

Die eigentliche Berechnung von optimalen Verhaltensstrategien geschah in den beiden letzten Kapiteln stets auf dem Umweg über gemischte Strategien. Der Rechen- und Speicheraufwand ließ sich dadurch begrenzen, dass Normalform und Minimax-Strategien jeweils nur auf der Basis einer überschaubaren Auswahl reiner Strategien berechnet wurden. Inwieweit die Gewinnaussichten eines Spielers durch diese strategische Einschränkung verschlechtert werden, ist zunächst völlig offen, kann aber nachträglich ermittelt werden, wenn man zu einer solchen Minimax-Strategie eine optimale Gegenstrategie bestimmt. Kann nämlich keiner der beiden Spieler mit einem gezielten Konter seine Aussichten verbessern, sind beide auf das eingeschränkte Spiel bezogenen Minimax-Strategien sogar insgesamt optimal.

Hauptbestandteil des gerade skizzierten Kriteriums ist die Berechnung optimaler Gegenstrategien. Relativ einfach ist sie möglich auf der Basis der extensiven Form, also der Beschreibung des chronologischen Spielverlaufs einschließlich aller möglichen Züge, der dabei erreichbaren Positionen und der Angaben darüber, welche Informationen jeweils dem aktuell ziehenden Spieler zugänglich sind: Dazu analysiert der Spieler, der die gemischte Strategie seines Gegners kennt und optimal kontern will, nach und nach jede Entscheidungssituation, und zwar in umgekehrter Richtung zur Spielchronologie. Konkret sucht er jeweils den Zug aus, der ihm die größte Gewinnerwartung bringt, wobei er bei den nachfolgenden Zügen von den Ergebnissen der zuvor bereits vorgenommenen Optimierungen ausgeht. Zug für Zug findet er so eine reine Strategie, mit der die gegnerische Strategie am besten gekontert wird.

Die rekursive Methode, eine optimale Gegenstrategie zu einer gemischten Strategie des Gegners zu bestimmen, ist vergleichbar einer Optimierung, wie wir sie bei Ein-Personen-Glücksspielen wie Black Jack kennen gelernt haben: Zwar ist der optimierende Spieler während einer real gespielten Partie keineswegs immer auf dem Laufenden darüber, welcher Spielstand aktuell erreicht ist, wohl aber kennt er stets die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Spielstände, die sich deshalb formal zu einer Position zusammenfassen lassen, bei der die aufteilende Zufallsentscheidung erst später getroffen wird – wie es bei einer ausgeteilten, aber noch verdeckt liegenden Karte der Fall ist. Insofern agiert ein Spieler, der die gemischte

Strategie seines Gegners kennt, im Prinzip innerhalb eines Ein-Personen-Spiels mit einelementigen Informationsmengen.

Aufbauend auf den gerade nochmals zusammengestellten Fakten lassen sich Minimax-Strategien iterativ bestimmen. Ausgegangen wird von einem in extensiver Form vorliegenden Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit perfektem Erinnerungsvermögen:

- Zu Beginn wird für jeden der beiden Spieler eine beliebige reine Strategie ausgewählt.
- Ein Iterationsschritt geht davon aus, dass für jeden der beiden Spieler eine Auswahl reiner Strategien vorliegt:
 - Für die ausgewählten Strategien wird zunächst die Normalform aufgestellt.
 - Anschließend wird mit dem Simplex-Algorithmus ein Paar von Minimax-Strategien und der dazu zugehörige Wert berechnet.
 - Für jede dieser beiden Minimax-Strategien wird nun eine optimale Gegenstrategie ermittelt. Alle Entscheidungssituationen, in denen der betreffende Spieler zieht, werden dazu in umgekehrter Richtung zur Spielchronologie optimiert; die so optimierten Einzelentscheidungen kombinieren sich zu einer reinen Strategie.
 - Schließlich wird geprüft, ob einer der beiden Spieler mit seiner spezifischen Gegenstrategie sein Ergebnis gegenüber dem Minimax-Wert verbessern kann, wie er sich für die aktuelle Strategie-Auswahl ergeben hat:
 - Hat sich keiner der beiden Spieler verbessert, sind die beiden gefundenen Minimax-Strategien auch im vollständigen Spiel optimal.
 - Andernfalls wird die Strategie-Auswahl von zumindest einem Spieler mit der gefundenen Gegenstrategie erweitert. Die Erweiterung erfolgt genau dann, wenn der betreffende Spieler damit sein Ergebnis verbessern kann²⁷¹.

Nach einer Beobachtung, wie sie wohl erstmals von Robert Wilson 1971 anlässlich der Beschreibung eines ähnlichen iterativen Verfahrens ausgesprochen wurde²⁷², sind im Mix von Minimax-Strategien meist nur relativ wenige reine Strategien enthalten. Insofern kann man hoffen, dass die beschriebene Iteration die gewünschte Vereinfachung bringt. Bestätigt werden konnte diese Vermutung zu Beginn der 1990er Jahre auf Grundlage von Untersuchungen darüber, welche Eigenschaften einer gemischten Strategie den Ausgang einer Partie wirklich beeinflussen und welche nicht. Auf Basis der gleichen Methoden wurde auch ein Verfahren kreiert, mit dem optimale Verhaltensstrategien direkt berechnet werden können. Dazu werden konkret zu jeder Endposition zunächst die Entscheidungen ergründet, die notwendig sind, damit eine Partie überhaupt auf diese Weise enden kann. Sowohl für jeden der beiden Spieler als auch für den Zufall ergibt sich so je eine Sequenz von Einzelentscheidungen. Und umgekehrt bestimmen die drei Sequenzen zusammen den Endknoten. Wir wollen dies an einem Beispiel verdeutlichen, bei dem es sich um ein weiteres Poker-Modell handelt:

-

²⁷¹ Reine Strategien, die nicht Bestandteil der aktuellen Minimax-Strategie sind, können unter Umständen sogar wieder aus der Auswahl entfernt werden, um so die nächste Minimax-Berechnung zu vereinfachen. Allerdings müssen bei einer solchen Verfahrensweise zyklische Iterationsverläufe verhindert werden. Möglich ist es beispielsweise, die Strategie-"Entrümpelung" nur in solchen Schritten zu vollziehen, in denen die bisher engste Eingrenzung des Minimax-Wertes verfeinert wurde.

²⁷² Robert Wilson, Computing equilibria of two-person games from the extensive form, Management Science, <u>18</u> (1972), S. 448-459. Wilson stützt seine Aussage mit der Formulierung "verified in computational experience on practical problems" (S. 449).

3.10 Baccarat: Ziehen bei Fünf?

Sollte ein Baccarat-Spieler, der mit seinen ersten beiden Karten den Wert Fünf erzielt, eine weitere Karte verlangen?

Das über 500 Jahre alte Baccarat – oft auch Chemin-de-fer genannt – ist neben Black Jack das am meisten in Spielkasinos veranstaltete Kartenspiel²⁸². Wie beim Black Jack wird mit mehreren 52er-Kartendecks gespielt, und ein Spieler muss, um zu gewinnen, durch Ziehen von Karten eine höhere Summe von Kartenwerten erzielen als die Bank – bei Gleichstand endet das Spiel unentschieden. Eine einzelne Karte besitzt den gleichen Wert wie beim Black Jack, jedoch wird bei der Summe nur die Einerstelle gewertet, während die Zehnerstelle grundsätzlich unberücksichtigt bleibt, so dass 9 das bestmögliche Resultat darstellt. Zum Beispiel ergibt eine Acht und eine Sechs zusammen den Wert 4; ein Bube und ein Ass ergeben den Wert 1.

Zu Beginn erhält beim Baccarat sowohl der Spieler als auch der Bankhalter zwei Karten verdeckt ausgeteilt. Hat einer von beiden ein Blatt mit dem Wert 8 oder 9, decken beide ihre Blätter zum Vergleich auf und es wird sofort abgerechnet. Andernfalls entscheidet zunächst der Spieler anhand seiner Karten, ob er eine dritte Karte haben möchte oder nicht. Falls er sich zu einer dritten Karte entscheidet, erhält er diese offen ausgeteilt. Anschließend ist der Bankhalter am Zug. Auch er darf eine dritte Karte nehmen, wobei er seine Entscheidung in Kenntnis seines eigenen Blattes, der Entscheidung des Spielers sowie der gegebenenfalls offen liegenden dritten Karte des Spielers treffen kann. Damit ist das Spiel zu Ende: Bank und Spieler decken ihre Blätter auf, und es wird abgerechnet.

Sehen wir uns die Spielchancen zunächst auf einem rein intuitiven Niveau an: Spieler und Bank haben nur dann Entscheidungen zu treffen, wenn beide Ausgangsblätter einen Wert von 0 bis 7 ergeben. Um ein möglichst günstiges Blatt zu erhalten, tun Spieler und Bank gut daran, bei niedrigen Werten eine dritte Karte zu ziehen; dagegen kann bei Werten von 7 oder knapp darunter meist auf eine dritte Karte verzichtet werden. Speziell der Spieler muss allerdings bedenken, dass er mit seiner Entscheidung der Bank einen Hinweis auf die mutmaßliche Qualität seines Ausgangsblattes gibt. Da eine dritte Karte offen ausgeteilt wird, lassen sich diese Hinweise, wenn auch in Grenzen, gegebenenfalls sogar auf das Gesamtblatt übertragen. Insgesamt kann die Bank damit ihre Strategie immer dann erfolgreich anpassen, wenn die Handlungen des Spielers Rückschlüsse auf dessen Ausgangsblatt zulassen.

Da beim Baccarat, so wie es im Spielkasino gespielt wird, auch andere Spieler auf den Sieg des Spielers setzen dürfen, sind die Entscheidungen zum Ziehen sowohl beim Spieler, aber auch beim Bankhalter, weitgehend vorgeschrieben, und zwar in einer für den betreffenden günstigen Weise. So muss der Spieler bei Werten 0 bis 4 eine weitere Karte ziehen, hingegen darf er es bei den Werten 6 und 7 nicht. Nur beim Wert 5 ist er in seiner Entscheidung frei. Die Strategie der Bank ist komplizierter, da sie außer dem eigenen Wert auch das Verhalten

_

²⁸² John Scarne, Complete guide to gambling, New York 1974, S. 459-479.

Wert der	Dritte Karte des Spielers: Werte, bei denen die Bank.		
Bank zieht		ni cht zi eht	
0-2	N, 0-9	-	
3	N, 0-7, 9	8	
4	N, 2-7	0, 1, 8, 9	
5	N, 4-7	0-3, 8, 9	
6	6-7	N, 0-5, 8, 9	
7	-	N, 0-9	
8-9	_	Bank deckt auf!	

Tabelle 52 Ziehstrategie der Bank, wie sie meist vorgegeben ist ("N" steht für den Fall, dass der Spieler keine dritte Karte gezogen hat)

des Spielers sowie gegebenenfalls dessen offen liegende Karte in Betracht ziehen muss (siehe Tabelle 52).

Wie Black Jack ist Baccarat fast symmetrisch, so dass der Vorteil der Bank nicht sofort offensichtlich wird. Beruht der Vorteil beim Black Jack darauf, dass der Spieler zunächst ziehen muss und daher zunächst allein das Risiko eingeht, mit einem Wert von mehr als 21 zu verlieren, resultiert der Vorteil der Bank beim Baccarat allein auf ihrem Informationsvorsprung: Die Bank kennt nämlich sowohl die Entscheidung des Spielers, die einen indirekten Schluss auf das Blatt zulässt, als auch die gegebenenfalls gezogene dritte Karte des Spielers. Dadurch ist es der Bank möglich, vielschichtiger auf die erreichte Spielsituation zu reagieren.

Anders als beim Black Jack wird beim Baccarat die Bank meist nicht durch einen Angestellten des Spielkasinos gehalten. Üblich ist, dass sich die Spieler bei dieser Funktion abwechseln – daher auch der Name Chemin-de-fer. Für die Veranstaltung und Überwachung des Spiels erhält das Kasino 5 Prozent der Gewinne, die der Bankhalter erzielt.

Die Grundregeln des Baccarat lassen verschiedene Varianten zu:

- Es können zwei Spieler, die beide ein eigenes Blatt erhalten, gleichzeitig gegen die Bank spielen. Demgemäß muss die Bank versuchen, ihre Entscheidung über eine dritte Karte möglichst gut auf die Entscheidungen, offene Karten und Einsatzhöhen beider Spieler auszurichten²⁸³.
- Prinzipiell können die Entscheidungen des Spielers und vor allem der Bank auch völlig freigegeben werden, zumindest dann, wenn jeder nur auf seine eigene Rechnung spielt. Bank und Spieler tragen dann ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel ohne perfekte Information aus, bei dem optimale Strategien unter Umständen gemischt zu sein haben.

Eine frühe Untersuchung des Baccarat ist in einem 1889 erschienenen Buch von Bertrand enthalten. Auch wenn diese Untersuchung letztlich unbefriedigend war, so diente sie doch Borel als plastisches Einführungsbeispiel in einer seiner Darlegungen²⁸⁴. Die spieltheoreti-

²⁸³ Untersucht wird diese Baccarat-en-Banque oder Baccarat à Deux Tableaux genannte Variante in: Sherry Judah, William T. Ziemba, *Three person Baccarat*, Operations Research Letters, <u>2</u> (1983), S. 187-192. Zum Spiel siehe John Scarne (Fußnote 282), S. 478-479; *Das große Buch der Spiele*, Freiburg (Schweiz) 1974, S. 130-134.

²⁸⁴ Siehe Kapitel 3.1, insbesondere Fußnote 231.

3.11 Pokern zu dritt: Vertrauenssache?

Drei Spieler pokern gegeneinander. Können zwei Spieler ihre Spielweise zum Schaden des dritten aufeinander abstimmen, ohne dabei zu mogeln?

Bei allen bisher analysierten Spielen ohne perfekte Information handelte es sich um Zwei-Personen-Nullsummenspiele. Auch die im zweiten Teil untersuchten Spiele mit perfekter Information waren fast ausschließlich Zwei-Personen-Nullsummenspiele. Die einzige Ausnahme bildete ein Drei-Personen-Nim-Spiel, das in Kapitel 2.3 erörtert wurde, um die prinzipiellen Unterschiede zwischen Zwei- und Mehrpersonenspielen deutlich zu machen. Ausgehend von einer beliebigen Position dieser Nim-Variante konnte dabei für jeden der drei Spieler eine Strategie gefunden werden, die zusammen ein Gleichgewicht bildeten.

Ein solches Gleichgewicht ist allgemein dadurch charakterisiert, dass von ihm ausgehend kein einzelner Spieler sich verbessert, wenn er seine Strategie einseitig verändert. Die Strategie jedes Spielers ist damit insofern optimal, als sie eine beste Antwort darstellt, mit der die als bekannt vorausgesetzten Strategien der Gegner gekontert werden. Geht man also davon aus, dass jedem Spieler diese Tatsache bewusst ist und dass jeder Spieler danach trachtet, seinen eigenen Vorteil zu maximieren, dann kann einem Gleichgewicht eine gewisse Stabilität unterstellt werden. Umgekehrt sind Situationen, in denen die aufeinandertreffenden Strategien kein Gleichgewicht bilden, dadurch gekennzeichnet, dass nachträglich zumindest ein Spieler guten Grund dazu hat, mit seiner Strategie unzufrieden zu sein. Aus spielerischer Sicht ergibt sich daher insgesamt die folgende Konsequenz: Gibt es zu einem Spiel eine unter erfahrenen Spielern gängige Spielweise, dann spricht einiges dafür, dass diese einem Gleichgewicht entspricht.

Macht allerdings ein Spieler einen "Fehler", dann geht die vermeintliche Stabilität eines Gleichgewichts verloren. Dabei ist der fehlerhaft agierende Spieler nicht unbedingt der einzige, der Einbußen gegenüber dem Spielresultat erleidet, wie es mit dem Gleichgewicht verbunden ist. Insofern muss dem vom Gleichgewicht abweichenden Spieler keineswegs ein wirklicher Fehler unterlaufen sein, bei dem der Spieler in Verkennung seiner eigenen Interessen unzweckmäßig gehandelt hat. Ebenso ist es denkbar, dass er ganz bewusst seinen eigenen Interessen entgegen agiert hat, um so zusammen mit einem anderen Spieler einen höheren Gesamtgewinn und davon im Rahmen einer Vereinbarung einen attraktiven Anteil zu erzielen.

Anders als bei Zwei-Personen-Nullsummenspielen stellt damit der Gewinn, wie er einem Gleichgewicht entspricht, für den betreffenden Spieler keine sicher erzielbare Gewinnerwartung dar. Darüber hinaus erfährt die von Zwei-Personen-Nullsummenspielen her gewohnte Bestimmtheit noch eine zweite Einschränkung: Ein Spiel kann nämlich im Allgemeinen mehrere Gleichgewichte mit verschiedenen Spielresultaten besitzen. Damit ist das Erreichen des Spielresultats, wie es einem bestimmten Gleichgewicht zugeordnet ist, alles andere als selbstverständlich.

Ist man allerdings bereit, die beiden genannten Einschränkungen in Kauf zu nehmen, lässt sich in einer dementsprechend schwachen Form sowohl Zermelos Bestimmtheitssatz als auch von Neumanns Minimax-Theorem auf beliebige endliche Mehrpersonenspiele, inklusive der ohne Nullsummen-Charakter, verallgemeinern. Beide Sätze wurden übrigens 1950 gefunden:

- Bei einem Spiel mit perfekter Information besitzt jeder Spieler eine reine Strategie, die sich zusammen zu einem Gleichgewicht kombinieren.
- Bei einem Spiel ohne perfekte Information existiert f
 ür jeden Spieler eine gemischte Strategie, die zusammen ein Gleichgewicht bilden.

Beim ersten Satz handelt es sich um den bereits in Kapitel 2.3 erörterten Satz, der auf Kuhn zurückgeht. Ausgehend von der extensiven Form eines Spiels lassen sich solche Strategien rekursiv konstruieren, und zwar Zug für Zug umgekehrt zur Spielchronologie.

Der zweite Satz ist der Gleichgewichtssatz von Nash, den dieser 21-jährig in seiner Dissertation beweis, eine Leistung, für die er über 40 Jahre später mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet wurde²⁸⁷. Zusammen mit John Nash wurden John Harsanyi (1920-2000) und Reinhard Selten (1930-) geehrt, die sein Konzept eines strategischen Gleichgewichts weiterentwickeln konnten²⁸⁸. Nashs Satz ist ein reiner Existenzsatz, der keine Aussage darüber macht, wie man ein solches **Nash-Gleichgewicht**, wie es meist genannt wird, berechnet und ob es davon mehrere gibt^{LVIII}. Nashs Satz und sein Konzept eines Gleichgewichts bilden die Basis der so genannten nicht-kooperativen Spieltheorie, innerhalb der rationales Verhalten von Spielern unter der Annahme untersucht wird, dass die Spieler keine bindenden Vereinbarungen über ihr Verhalten und eine Gewinnaufteilung treffen können. In der Ökonomie sind solche Modelle bei der theoretischen Untersuchung von Märkten und den sich darin bildenden Preisen hilfreich – welche Erkenntnisse aber bringen sie für reale Gesellschaftsspiele?

Nash selbst hat im Anschluss an seine Beweisführung ein einfaches Beispiel für eine Anwendung auf ein Gesellschaftsspiel gegeben²⁸⁹. Da er die Anwendungen seines Konzepts vor allem bei Spielen sieht, bei denen "die allgemein akzeptierten Sitten eines fairen Spiels eine nicht-kooperative Spielweise beinhalten", untersucht Nash ein Pokerspiel für drei Personen. Wegen der sonst zu hohen Komplexität ist Nash dazu genötigt, sich auf ein sehr einfaches Modell zu beschränken:

_

²⁸⁷ John Nash, Equilibrium points in N-person games, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 36 (1950), S. 48-49; John Nash, Non-cooperative games, Annals of Mathematics, 54 (1951), S. 286-295; beide Artikel sind nachgedruckt in: Harold W. Kuhn (ed.), Classics in game theory, Princeton 1997, S. 3-4, 14-26. Die eigentliche Dissertation ist fast identisch mit der zweitgenannten Publikation. Ein Faksimile der Dissertation findet man in Harold W. Kuhn, Sylvia Nasar (ed.), The essential Nash, Princeton 2002, S. 53-84. Hintergründe zur Dissertation gibt Harold W. Kuhn u.a., The work of John F. Nash jr. in game theory, Nobel Seminar 8 December 1994, Duke Mathematical Journal, 81 (1995/96), S. i-v, 1-29; Sylvia Nasar, Genie und Wahnsinn: Das Leben des genialen Mathematikers John Nash, München 2002 (amer. Orig. 1998), Kapitel 10. Das zuletzt genannte Buch diente auch als Vorlage für den Kinofilm A Beautiful Mind, der 2002 mit vier Oscars prämiert wurde (u.a. als "bester Film des Jahres 2001").

Eric van Damme, On the contributions of John C. Harsanyi, John F. Nash and Reinhard Selten, International Journal of Game Theory, 24 (1995), S. 3-11; Joachim Rosenmüller, Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften – die Spieltheorie wird hoffähig, Spektrum der Wissenschaft, 1994/12, S. 25-33; Bluffen und drohen, Der Spiegel, 1994/42, S. 134-136.

Siehe dazu die in Fußnote 287 angeführte Arbeit aus dem Jahre 1951. Eine ausführlichere und hinsichtlich der Gebotshöhe verallgemeinerte Version des Poker-Modells wird beschrieben in: J. F. Nash, L. S. Shapley, A simple three-person poker game, in: Kuhn, Tucker (ed.), Contributions to the Theory of Games I, Reihe: Annals of Mathematics Studies, 24 (1950), S. 105-116. Für eine spezielle Gebotshöhe wird dieses Modell auch in Ken Binmore, Fun and games, Lexington 1992, S. 593-601 erörtert.

3.12 "QUAAK!" – (k)ein Kinderspiel

Zwei Spieler knobeln nach den folgenden Regeln: Zu Beginn erhalten beide Spieler je 15 Chips, mit denen sie mehrere Runden austragen. Pro Runde nimmt jeder Spieler eine bestimmte Zahl seiner ihm noch verbliebenen Chips – zulässig ist jede Zahl zwischen 0 und 3 – in seine geschlossene Hand. Nachdem beide Spieler ihre Wahl geheim getroffen haben, öffnen sie ihre Hand und vergleichen. Hat ein Spieler mehr Chips in seiner Hand als sein Gegner, erhält er einen Punkt. Nach der Runde werden die gesetzten Chips beider Spieler weggelegt. Ein Spieler gewinnt, wenn es im gelingt, drei Punkte mehr als sein Gegner zu erlangen; ansonsten endet das Spiel unentschieden. Wie verhält man sich am besten?

Unter dem Namen "QUAAK!" erschien das beschriebene Spiel 1994 als Kinderspiel²⁹⁸. Der jeweils aktuelle Spielstand wird mit einem als Frosch gestalteten Spielstein angezeigt, der über sieben, den möglichen Punkte-Salden entsprechenden Feldern vor- und zurückgezogen wird. Auch wer die obere Altersangabe von 12 Jahren überschritten hat, kann durchaus seine kurzweilige Unterhaltung darin finden, sein strategisches Geschick in ein paar schnellen Runden zu messen. Und wer am Spielprinzip Freude gefunden hat, gleichzeitig aber nach einem deutlich abwechslungsreicheren Spiel sucht, der kann zum Spiel "Hol's der Geier" von Alex Randolph greifen²⁹⁹.

Aus spieltheoretischer Sicht handelt es sich bei "QUAAK!" um ein zufallsfreies Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit perfektem Erinnerungsvermögen, aber ohne perfekte Information: Eine perfekte Information ist deshalb nicht gegeben, weil die Spieler gleichzeitig ziehen. Ein Spieler kann daher die Wirkung seines anstehenden Zuges zum Zeitpunkt der Entscheidung nicht eindeutig einschätzen. Da sein Gegner derselben Ungewissheit ausgesetzt ist, hat

²⁹⁷ Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichts werden in den Kapiteln 3.7 und 4.1 des in Fußnote 296 genannten Buches behandelt. Weitere Darstellungen findet man in Christian Rieck, *Spieltheorie, Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler*, Wiesbaden 1993, Kapitel 5; Roger B. Myerson, *Game theory*, Cambridge 1991, Kapitel 4 und 5.

²⁹⁸ Als "Mitbring-Spiel" des Otto Meier Verlags Ravensburg. Autor ist Dirk Hanneforth.

²⁹⁹ Eine Partie des Spiels "Hol's der Geier" verläuft immer über 15 Runden. Statt Chips erhält jeder Spieler einen Vorrat von 15 Karten mit den Werten von 1 bis 15. Außerdem ist der Punktwert, den es in einer Runde zu gewinnen gibt, nicht fest, sondern er wird jeweils zu Rundenbeginn durch Ziehung einer entsprechenden Karte ermittelt. Insgesamt gibt es 15 solche Karten, so dass die ausgespielten Werte in ihrer Gesamtheit immer gleich sind, aber in zufälliger Reihenfolge erscheinen. Weitere Sonderregeln machen das Spiel noch abwechslungsreicher. Vom Ansatz her kann die Zweipersonen-Version mathematisch genauso analysiert werden wie "QUAAK!", jedoch sind die zu berücksichtigenden Zwischenstände so zahlreich, dass eine Anaylse vollständig kaum zu realisieren sein dürfte.

der Spieler auch umgekehrt zumeist ein Interesse daran, dass seine Entscheidung nicht vorhersehbar ist. Der Spieler tut deshalb gut daran, seine Entscheidung zufällig zu treffen. Konkret werden wir zur Beantwortung der gestellten Frage nach einer Minimax-Strategie suchen. Mit ihr kann sich ein Spieler aufgrund der bestehenden Symmetrie im Spiel vor einer negativen Gewinnerwartung schützen. Infolge des perfekten Erinnerungsvermögens ist eine solche Minimax-Strategie in Form einer Verhaltensstrategie konstruierbar. Diese umfasst für jeden Informationsstand, der sich für einen Spieler im Verlauf einer Partie ergeben kann, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die möglichen Züge. Dabei können offensichtlich solche Informationsstände zusammengefasst werden, die trotz unterschiedlicher Vorgeschichte im Hinblick auf die weiteren Spielmöglichkeiten vollkommen äquivalent sind. Das heißt, die bestimmenden Parameter eines Informationsstandes sind einzig die drei folgenden Werte:

- die Anzahl der Spieler 1 noch verbliebenen Chips: 0, 1, ..., 15;
- die Anzahl der Spieler 2 noch verbliebenen Chips: 0, 1, ..., 15;
- der aktuelle Punkte-Saldo aus der Sicht des ersten Spielers: -2, -1, 0, 1 oder 2.

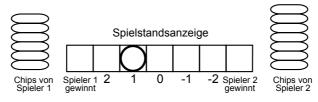


Bild 57 "QUAAK!"-Position 6-7-1

Liegt ein solcher Zwischenstand vor, ist diese Tatsache beiden Spielern bekannt – nicht informiert ist ein Spieler lediglich über die parallel erfolgende Entscheidung seines Gegners. Daher lässt sich ein Zwischenstand, wie er zum Beispiel in Bild 57 zu sehen ist, auch als Beginn eines abgeschlossenen Teilspiels auffassen, zu dem es einen eindeutig bestimmten Minimax-Wert gibt. Auf Basis dieses gedanklichen Ansatzes können wir die zugehörigen Minimax-Werte und die dafür erforderlichen Strategien Zug für Zug ermitteln – wie immer umgekehrt zur Spielchronologie. Dabei muss die Minimax-Analyse jeweils nur einen Doppel-Zug weit durchgeführt werden. Das heißt, der gesuchte Minimax-Wert einer gegebenen Position wird als Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe aus den Minimax-Werten derjenigen Positionen berechnet, die in einem Doppel-Zug entstehen können. Notwendig ist das insgesamt für alle Positionen, die aus der Anfangsposition im Verlauf des Spiels entstehen können.

Ein kleine Besonderheit stellt die Tatsache dar, dass das Spiel in Ausnahmefällen nie endet, nämlich dann, wenn beide Spieler fortgesetzt keinen Chip setzen, obwohl einer der Spieler mit einer anderen Entscheidung durchaus noch gewinnen könnte. Indem man mehrfache Zugwiederholungen als remis wertet, zwingt man den im Vorteil stehenden Spieler dazu, von einem solchen defensiven und völlig unergiebigen Verhalten abzusehen. Bei der Beschreibung der durchzuführenden Berechnungen wird dieses Problem gleich näher erörtert.

Beginnen wir mit einer einfachen Situation, bei der beide Spieler noch zwei Chips besitzen und der erste Spieler mit einem Punkte-Saldo von 2 bereits fast gewonnen hat:

3.13 Mastermind: Farbcodes und Minimax

Wie stark kann beim Mastermind der den Farbode vorgebende "Codierer" die Gewinnaussichten des Spiels beeinflussen?

In Kapitel 2.15 haben wir Suchstrategien für das Spiel Mastermind unter zwei verschiedenen Blickwinkeln optimiert. Zum einen wurde untersucht, wie viele Züge wenigstens dazu notwendig sind, jeden beliebigen Code *sicher* zu "knacken" – beim 6⁴-Mastermind, also bei Codes der Länge vier mit einer Auswahl aus sechs Farben, sind es fünf Züge. Zum anderen wurde unter der Annahme, dass der zu suchende Code zufällig und gleichwahrscheinlich unter allen Möglichkeiten gewählt wird, die zu *erwartende* Zugzahl minimiert – beim 6⁴-Mastermind beträgt dieses Minimum 4,340 Züge.

In den beiden Ansätzen kommt der Charakter von Mastermind als Zweipersonenspiel gar nicht beziehungsweise nur wenig zum Tragen, was mit der relativ passiven Rolle des Codierers auch durchaus zu rechtfertigen ist. Daher eröffnet die eingangs gestellte Frage eine nahe liegende Erweiterung der bisherigen Untersuchungen. Dazu beschreiben wir zunächst Mastermind im Sinne des spieltheoretischen Spielmodells:

Mastermind ist ein zufallsfreies Zwei-Personen-Nullsummenspiel ohne perfekte Information, aber mit perfektem Erinnerungsvermögen. Der Codierer hat nur am Spielanfang eine echte Entscheidung zu treffen, der eine einzige, einelementige Informationsmenge zugrundeliegt. In ihrer Struktur weitaus komplexer sind die Entscheidungssituationen des Decodierers. Jede von seinen Informationsmengen spiegelt den ihm bekannten Anteil des vorangegangenen Spielverlaufs wider, das sind die gestellten Fragen und die darauf erhaltenen Antworten. Wirklich maßgebend sind aber nicht die gesamten Details der Fragen und Antworten, sondern nur die daraus möglichen Schlussfolgerungen. Konkret werden beim Decodierer die Informationsstände durch die Menge der Codes charakterisiert, die mit den bisherigen Fragen und Antworten im Einklang stehen und daher noch möglich sind.

Die gemischten Minimax-Strategien können aufgrund des perfekten Erinnerungsvermögens in Form von Verhaltensstrategien gefunden werden. Eine weitere Vereinfachung der Minimax-Analyse lässt sich aus den Symmetrien ableiten, die das Mastermind-Spiel aufgrund der möglichen Farb- und Positionspermutationen aufweist: Sollte man zunächst nur eine Minimax-Strategie finden, die diese Symmetrien nicht alle respektiert, so lässt sich daraus eine symmetrische Minimax-Strategie finden, indem man die unsymmetrische Strategie mit allen zu ihr symmetrischen Pendants, wie sie unter den Farb- und Positionspermutationen entstehen können, gleichwahrscheinlich mixt. Deshalb kann man einen der beiden Spieler auf solche symmetrische Strategien beschränken, ohne dass er dadurch einen Nachteil erleidet. Mit dieser Beschränkung ergeben sich zugleich beim Gegner entscheidende Vereinfachungen: Hat etwa der Codierer seinen Code mit symmetrisch verteilten Wahrscheinlichkeiten ausge-

wählt, dann ändert sich die zur Decodierung notwendige Zugzahl nicht, wenn der Gegner seine Suchstrategie mittels Farb- und Positionspermutationen modifiziert. Das heißt, derart ineinander transformierbare Decodier-Strategien dominieren sich gegenseitig und können jeweils bis auf eine weggelassen werden, was das Spiel zum zweiten Mal erheblich vereinfacht

Hat man im solchermaßen zweifach reduzierten Spiel Minimax-Strategien gefunden, können daraus sofort Minimax-Strategien für das originale Spiel konstruiert werden: Dazu kann die symmetrische Strategie des Codierers unverändert übernommen werden. Hingegen ist die Decodier-Strategie zu symmetrisieren, das heißt sie wird mit sämtlichen ihrer "Spiegelbilder" gleichwahrscheinlich gemixt³⁰². Dass dies alles komplizierter klingt, als es in Wahrheit ist, wird am besten an Hand einer einfachen Mastermind-Variante deutlich:

Das 3²-Mastermind mit seinen neun Codes

lässt 3! = 6 Vertauschungen der Farben und weitere 2! = 2 Vertauschungen der Positionen zu. Insgesamt gibt es also $3! \cdot 2! = 12$ Symmetrien. Eine symmetrische Strategie des Codierers kann durch eine der beiden Codes 11 und 12 repräsentiert werden. Dabei werden einerseits die Codes

11, 22, 33

und andererseits die Codes

jeweils gleichwahrscheinlich als zu knackender Code ausgewählt. Beschränkt man den Codierer auf symmetrische Strategien, dann kann sich der Decodierer in seinem ersten Zug auf die beiden Tipps 11 und 12 beschränken.

Zur Berechnung von Minimax-Strategien für das 3²-Mastermind bieten sich die Techniken an, die wir schon bei den Spielen Le Her und Baccarat verwendet haben, wobei der Aufwand in einem dazu vergleichbaren Rahmen bleibt³⁰³. Als Ergebnis erhält man für das reduzierte Spiel die folgenden Minimax-Strategien:

- Der Codierer entscheidet sich gleichwahrscheinlich zwischen den beiden Repräsentanten 11 und 12. Damit werden die Codes 11, 22 und 33 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit von 1/6 gewählt, während die anderen Codes 12, 21, 13, 31, 23 und 32 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit von 1/12 zur Auswahl kommen.
- Der Decodierer tippt zunächst den Code 12.
 - Besteht die Anwort aus zwei schwarzen Stiften, hat der Decodierer sein Ziel bereits erreicht.
 - Bei keinem Antwortstift oder zwei weißen Antwortstiften kann der Decodierer den von seinem Gegner gewählten Code sofort sicher erkennen, nämlich 33 beziehungsweise 21. Der Decodierer erreicht damit sein Ziel im zweiten Zug.
 - Bei einem weißen Antwortstift verbleiben noch 31 und 23 als mögliche Codes. Wird im zweiten Zug nach einem von ihnen, etwa dem Code 23, gefragt, dann wird das Ziel im ungünstigsten Fall im dritten Zug erreicht.

-

³⁰² Eine formale Darlegung dieser Überlegungen findet man in K. R. Pearson, *Reducing two person*, zero sum games with underlying symmetry, Journal of the Australian Mathematical Society, Ser. A, 33 (1982), S. 152-161.

³⁰³ In der in Fußnote 302 genannten Arbeit wird das 3²-Mastermind auf eine 2×5-Matrix reduziert.

Stichwortverzeichnis

A Additionsgesetz 5, 6, 31, 33 Allemang, Dean XII, 174, 175 Allen, James 111	Count 90, 91 doppeln 82, 88, 93 High-Low-System 90, 91, 93 Softhand 83, 86 teilen 82, 88, 93
Allis Victor 111 Alpha-Beta-Algorithmus 184, 191, 194	versichern 82 Blockbusting 151
Anreiz 144	Bluff VIII, 254, 261, 290, 295
äquivalente Positionen 121, 122, 129,	Bohlmann, Georg 31, 33 Bolyai, Johann von 205
Arbuthnot, John 47	Border-to-Border-Spiel 108
A-Strategie 182, 184	Borel, Émile 19, 251, 254, 309
Aufenthalt 73	Bortkiewicz, Ladislaus von 62
Aufenthaltswahrscheinlichkeit 78	Bouton, Charles 117, 119, 122
Ausgleich 17	Bridge VI, IX, 317
Ausnahmeposition 169	Bridge-it 108, 110 , 208, 212, 215
Austausch-Schritt 270 , 278	Brouwer'scher Fixpunktsatz 256
,	brute force 182
В	B-Strategie 182, 186
Babbage, Charles 96, 178	Buffon, Georges Louis-Leclerc, Compte
Baccarat 251, 254, 308, 309, 310	de 25
Backgammon VI, 39, 51, 57, 103, 224	Buffon'sches Nadelproblem 25, 27, 30,
Doppel 225	64
Jacoby-Paradoxon 229	_
Redoppel 225	C
Running Game 57, 230	Cantelli, Francesco Paolo 19
stetiges Modell 232	Cantor, Georg 203
Verdopplungswürfel 225, 227	Chaitin, Gregory 31
Zwei-Steine-Modell 233	Chaos 29
Banerji, Ranan 173	Checkers 111, 112
Baum 209	Chemin-de-fer 308
Berechenbarkeit 200, 207	Chi-Quadrat-Funktion 68
Berlekamp, Elwyn XI, XII, 127, 138, 154, 161, 166, 168	Chi-Quadrat-Verteilung 69 Chuck-a-Luck 38, 40
Bernoulli, Jakob 1, 2, 3, 5, 19	Church'sche These 200
Bernoulli, Niklaus 285, 286	Comparison Training 196
Bestimmtheitssatz 97 , 98, 99, 103 , 104, 105, 116, 170, 219, 248, 311	Condon, Joe 187 Conway, John Horton 127, 137, 138, 173
binäres Zahlensystem 118	Conway-Spiel 135, 153, 154, 164, 166
Binomialkoeffizient 10, 16	Cook, Stephen Arthur 216
Binomialverteilung 17, 19, 54, 60	Cram 139
Bishop, Richard XI, 77	Craps 22
Black Box 243	Cutoff 185
Black Jack IX, XII, 36, 81	

D	fiktive Partienserie 281, 288
Dame VI, 103, 111, 214	Fisher, Roland Aylmer 287
Dampfross 51, 56	Flood, Merill 245, 329
Dantzig, George 265, 269	Focus 105
Dawsons Schach 125	Forward Pruning 186
Dedekind, Richard 137	Fraenkel, Aviezri S. XI, 177, 218
deterministisch 28, 29	Freiheitsgrad 69
Diagonalverfahren 204	\mathcal{E}
Diophant 206	G
diophantische Gleichung 206	Gale, David 109, 273
Diplomacy VI	Gardner, Martin 105, 108, 109, 139
disjunktive Summe 122 , 128, 139, 150,	Gasser, Ralph 111, 164
157, 168	Gefangenendilemma 329
Domino 139	Geister VI, 291
Dreipersonenspiel 112, 113, 115, 311	Gerade oder ungerade 246, 247
Dresher, Melvin 259, 329	Gesetz der großen Zahlen 3, 18, 49, 62,
Dunning, Charles 173	64
zuming, churist 175	schwaches 50
E	starkes 19
effizientes Verfahren 211	Gesetz der kleinen Zahlen 62
Einfachheitssatz 134	Gewinnerwartung 41, 105
Elkies, Noam D. 168	Gewinnhöhe 38, 40
Endknoten 101, 298, 303	Gewinnposition 170
Endspiel 97, 189	Gleichgewicht 116, 311, siehe auch
Entscheidungsproblem 212, 215	Nash-Gleichgewicht
Entscheidungs-Sequenz 298, 301	gleichmöglich 3, 8, 15, 25, 34, 35
Environmental Go 166	Glücksspiel VI, VIII, 1, 287, 297
Epimenides 203	Go VI, IX, 98, 103, 113, 148 , 149, 153,
Erdös, Paul 56	157, 214
Ereignis 2, 32	kaltes 160
Erfüllbarkeitsproblem 216	mathematisches 154
Ergebnismenge 32	Gödel, Kurt 204
Erwartung 41	Gödel'scher Unvollständigkeitssatz 204,
Erwartungswert 40 , 44	205
Euklid 204	Go-Moku 106, 111, 112, 214, 215
EXPTIME 213	Graph 208
-vollständig 217	Gross, Oliver 110
extensive Form 294, 312, 319	Größer-oder-gleich-Relation bei Positionen 131
F	Grundy, Michael 122
	Grundy-Wert 122 , 123, 126
Faktorisierung 216 Fakultät 8	Guy, Richard 125, 138
Farkas, Julius 256	Guy, Kicharu 123, 138
fehlerhafte Spielweise 116	Н
Ferguson, T. S. 126, 172	Hackenbush 127
Fermat, Pierre de 5, 15, 202	Halma VI
Fermat'sche Vermutung 202	Halteproblem 201, 202
Feynman, Richard 1	Hanner, Olof XI, 128, 150
1 Cymnall, Richard 1	11amici, Oldi A1, 120, 130

Harsanyi, John 312, 320	Kronecker, Leopold 137
Hash-Tabelle 187, 188, 191	Kuchenregel 104
Hein, Piet 108, 177	Kuhn, Harold 116, 294, 297, 312, 316
Heiratssatz 107	künstliche Intelligenz 178
Heisenberg, Werner 29	
Henny, Julian XI, 285	L
Herda, Hans 177	Lai, Toni 331
heuristische Methoden 186	Lai, Tony 243
Hex 108, 109 , 112, 208 , 210, 212, 213,	Landlord's Game 70
215	Laplace, Pierre Simon 3, 5, 8, 28
Hilbert, David 30, 204, 206	Laplace-Modell 22, 25, 32, 35
Hilbert'sche Probleme 31	Lasker, Emanuel 112, 120, 121, 122,
Hol's der Geier 320	149, 174, 175
Huygens, Christian 62	Lasker-Nim 120, 121, 123, 125, 126
Hypothese 46, 68	last move improvement 187
Hypothesentest 47, 54	Le Her 284 , 286, 287, 288, 289, 295, 296
	Lehmans Kriterium 209
I	Leiterspiel IX, 67, 74
Information IX	Lineare Optimierung 216, 266, 274
imperfekte VI, 246 , 291	lineare Ungleichungen 265
perfekte 99 , 103, 122, 294	Links-Stop 142, 162
Informationsmenge 293, 303, 310	Lobatschewski, Nikolai 205
Informationsstand 100, 248, 291	Lotto 7, 9, 11, 12, 14, 39, 59
inverse Position 129, 136	L-Verbesserung 187
Inzentive 144	
	M
K	Markow, Andree Andrejewitsch 73
K Kac, Marc 56	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69 , 73, 74, 80
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69 , 73, 74, 80 absorbierende 80
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69 , 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69 , 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69 , 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95 Komi 166	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318 mit perfekter Information 116
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95 Komi 166 Komplexität 211, 212	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318 mit perfekter Information 116 Memory VII, 218, 220, 223
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95 Komi 166 Komplexität 211, 212 Komplexitätstheorie 210, 212	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318 mit perfekter Information 116 Memory VII, 218, 220, 223 Mensch ärgere dich nicht VI, 39, 51, 224
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95 Komi 166 Komplexität 211, 212 Komplexitätstheorie 210, 212 konvexe Menge 256	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318 mit perfekter Information 116 Memory VII, 218, 220, 223 Mensch ärgere dich nicht VI, 39, 51, 224 Méré, Chevalier de 4, 6, 62
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95 Komi 166 Komplexität 211, 212 Komplexitätstheorie 210, 212 konvexe Menge 256 Kooperation 116	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318 mit perfekter Information 116 Memory VII, 218, 220, 223 Mensch ärgere dich nicht VI, 39, 51, 224 Méré, Chevalier de 4, 6, 62 Milnor, John 128, 142, 150
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95 Komi 166 Komplexität 211, 212 Komplexitätstheorie 210, 212 konvexe Menge 256 Kooperation 116 Koopmans, Tjalling 265	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318 mit perfekter Information 116 Memory VII, 218, 220, 223 Mensch ärgere dich nicht VI, 39, 51, 224 Méré, Chevalier de 4, 6, 62 Milnor, John 128, 142, 150 Milnors Ungleichungen 157
K Kac, Marc 56 Karmarkar, Narendra 268 Kegel-Nim 124, 126, 172, 176 Kempelen, Baron von 96 Killer-Heurisitk 186 kinetische Gastheorie 28 Knuth, Donald XII, 137, 241, 330, 331 Ko 164, 166 Koalition 114, 115, 117, 315, 318 Koller, Daphne XI, 303, 307 Kolmogorow, Andrej 31, 33 Kombinatorik 8 kombinatorisches Spiel VI, IX, 95 Komi 166 Komplexität 211, 212 Komplexitätstheorie 210, 212 konvexe Menge 256 Kooperation 116	Markow, Andree Andrejewitsch 73 Markow-Kette 69, 73, 74, 80 absorbierende 80 irreduzible 80 reguläre 80 Maschinelles Lernen 195 Mastermind XII, 238, 245, 327 durchschnittliche Zuganzahl 242 Minimax-Strategie 328 worst case 241 mathematisches Go 163 Maximin-Wert 100 Maxwell, James Clerk 28 Mehrpersonenspiel 318 mit perfekter Information 116 Memory VII, 218, 220, 223 Mensch ärgere dich nicht VI, 39, 51, 224 Méré, Chevalier de 4, 6, 62 Milnor, John 128, 142, 150

-Satz 255 , 257 , 259, 260, 269, 311 -Strategie 101, 274, 280, 285, 287, 296, 321, 328 -Strategie, relative 289 -Suche 192 -Verfahren 191	-vollständig 216 Nullfenster-Suche 187 Null-Move 186 Nullposition 128, 129, 131 Nullsummenspiel 99 , 254, 255 Nullzug 186
-Wert 100 , 142	-
Misère-Nim 126	0
Misère-Version 169, 171, 173, 176, 177	oktales Spiel 125, 173, 175
Mises, Richard von 31	optimale Gegenstrategie 283, 288, 297
Mittelwert 143, 147, 159, 160	
Modell IX, 19, 21, 28, 31, 33, 38, 57, 73,	P
200, 230, 254, 294, 312, 327	P (Komplexitätsklasse) 212
Monopoly IX, 69, 76, 80	Paarungsstrategie 109, 110
Monte-Carlo-Methode 62, 63 , 92, 283	Painlevé, Paul 251
Monte-Carlo-Spielbaumsuche 195, 197	Papier-Stein-Schere VI, VII, 95, 96, 99,
Montmort, Pierre Rémond de 285	100, 102, 246
Morgenstern, Oskar 248, 255, 290, 294,	Parallelenaxiom 204
317	Pascal, Blaise 4, 15
Mühle VI, 103, 110	Pascal'sches Dreieck 10
Müller, Martin XI, 164, 168	Pasch 70
Multi Armed Bandit Problem 198	Patashnik, Oren 107
Multiplikationsgesetz 5, 31, 33, 42	Pearson, Karl 68
N	perfektes Erinnerungsvermögen 291, 294, 296, 303, 307, 314, 321, 327
Nash, John 106, 108, 312, 320	Permanenz 20
Nash-Gleichgewicht 312 , 314, 318, 319	Pi 25, 27, 63
Nebenbedingung 266, 305	Pivotelement 277
Negamax-Algorithmus 195	Plambeck, Thane XII, 126, 173, 175
Negascout-Verfahren 187	Poe, Edgar Allan 21, 96, 246
negative Position 131	Poisson, Siméon Denis 60
Nestor, Tom 331	Poisson-Verteilung 59, 60, 61
Neumann, John von 64, 117, 137, 179,	Poker VI, VII, VIII, IX, 9, 13, 14, 253,
248, 254, 256, 269, 290, 294, 317,	260 , 263, 264, 311
318	-Modell 254, 281, 290, 292, 295, 298,
neuronales Netz 196	303, 312, 318
neutrales Spiel 122, 127	polynomial berschränkt 211
Neuwirth, Erich 243	Position 96
Nievergelt, Jürg XI, 110	positive Position 131
Nim 117, 122, 169, 212, 215	Primzahl 30, 56, 65
-Addition 118	Primzahltest 216
-Automat 120	Programm 179
-Summe 117, 119	Programmiersprache 52, 63
Nimbi 177 , 189	Prüfgröße 46
Normalform 102 , 247, 280, 294, 296	PSPACE 213
Normalverteilung 51, 53, 54, 55, 56	-hart 217
NP 213, 216	-vollständig 217
-hart 216, 217, 307	Punktwertungspiel 157
1.0.0 210, 211, 301	

Q	Siegel, Aaron 175
QUAAK! 320	signalisieren 317
Qubic 106, 107	Simplex-Algorithmus 269 , 276, 277,
Quote 100, 107	280, 284, 289, 296
R	Simplex-Tableau 276
radioaktiver Zerfall 30	Simulation 64
Randolph, Alex V, 104	Skat VI, VII, 9, 280, 291
Realisierungsgewicht 302 , 303, 305	Snakes and Ladders 67
Realisierungsplan 303	Spiel
Rechteckregel 277	Definition IX, 294
Rechts-Stop 142, 162	gekühltes 146, 160
Reinforcement Learning 196	gelöstes 112
Rekursion 191, 192	rekursives 323
relative Häufigkeit 2 , 19, 26, 54	schwach gelöstes 112
Reversi VI, 103, 214, 215	symmetrisches 247, 251, 259, 264
	ultra-schwach gelöstes 112
Riedwyl, Hans XI, 13 Risiko 58	unwesentliches 115
Robinson, Julia 283	
	Spielbaum 101, 292
Roulette 17, 55, 59, 61, 62, 65, 95, 180	Spieler fiktiver 291
Ruhesuche 181, 184, 191 Ruin 62, 64	Team als 291
Ruin-Problem 74, 80	Spieltheorie VIII, IX, 255
Russell, Bertrand 204	kombinatorische 128
Russen, Bertrand 204	kooperative 115, 319
S	nicht-kooperative 312, 319
Sackson, Sid 105	Spight, Bill 168
Sattelpunkt 101 , 102, 248, 250	Sprague, Roland 122
Satz vom Zahlen-Vermeiden 140, 153	Standardabweichung 43 , 44
Scarne, John 7	Standard-Nim 124, 125
Schach VI, IX, 95, 97, 98, 102, 103, 113,	Standardnormalverteilung 53
149, 168 , 178 , 214	stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung
-automat 96	72
-computer 178	Statistik 47
Schaeffer, Jonathan 111	Stengel, Bernhard von XI, 303, 304
Schaltspiel 166	Steuer 145, 160
Schlupfvariable 270, 274	Stichprobenfunktion 46, 68
Schrödinger, Erwin 29	Stirling'sche Formel 9
Schwarz-Weiß-Nim 127	Strategie 99 , 102, 116, 248
Scotland Yard 104	dominierte 263
Scrabble VII	gemischte 249 , 255, 257, 280, 287,
Selten, Reinhard 312, 320	290, 296, 316
sequentielle Form 303	optimale 101
Shannon, Claude 179, 180, 181, 196	reine 249 , 280
Shannons Switching Game 208	Stratego VI, 291
Shogi 214	Streuung 43
Sibert, William 173	Subtraktionsspiele 125
Sibert-Conway-Zerlegung 173	Summe von Conway-Spielen 136
Siebzehn-und-Vier 81	Supervised Learning 196

Symmetrie 2, 4, 18, 23, 35, 46, 55, 68, 103, 115 T Tabellenkalkulation 52, 223, 282 Tan, Baris XI, 59 Teilungsproblem 15 Temperatur 143, 144, 145, 147, 159, 166 Temporal Difference Learning 196 texanisches Roulette 104 Thermograph 145 Thermostrat 144, 147 Thompson, Ken 187 Thorp, Edward 55, 89, 90, 94, 236, 238, 310 Tic-Tac-Toe 106, 107, 109 transitiv 45 Travelling-Salesman-Problem 213, 216 Tschebyschew, Pafnuti Lwowitsch 48 Tschebyschew'sche Ungleichung 48, 54 Tucker, Albert W. 274, 329	Verhaltensstrategie 290, 294, 295, 296, 300, 303, 307, 316, 321, 327 Verlustposition 170 Verschiebungsgesetz 140 Versuchsreihe 46 Viaud, D. 242, 245 Vier gewinnt 111, 112 Vierfarbensatz 107 Vierpersonenspiel 115 Volumen 64 von-Neumann-Maschine 179 W Wahrscheinlichkeit 2, 3, 32 bedingte 36 Formel für die totale 37 geometrische 25 Wahrscheinlichkeitsrechnung VIII, 30 Axiome der 32 Waldegrave 285 Wert eines Spiels 101
Turing, Alan 179, 182, 183, 196, 200 Turing-Maschine 182, 200	Wiener, Michael 331 Wolf und Schafe 104
Turnier 115	Wolfe, David 154, 161, 217
Twixt 104, 108	Würfel 1, 46 Würfelsumme 51
U Übergangsgleichungen 71	Z
Übergangsmatrix 73, 74	zahme Misère-Version 172
Übergangswahrscheinlichkeit 80 UCT-Algorithmus 198 Ulam, Stanislaw 64	zehntes Hilbert'sches Problem 206 zentraler Grenzwertsatz 49, 52 , 56, 59, 64
unabhängige Ereignisse 18, 36, 73	Zermelo, Ernst 96, 97, 101
Ungewissheit V, VI, VII, 95, 246 unscharfe Position 131	Zufall 1, 27, 95, 291 Zufallsexperiment 3, 22, 23, 32, 36
unsymmetrischer Würfel 22	Zufallsgröße 39, 44
Unterprogramm 191 Up 160	Zufallszahlen 63, 64 Zufallszug IX
Upper-Confidence-Bounds-Algorithmus 198	Zug VI, IX dominierter 134
V	zulässiger Bereich 268 Zuse, Konrad 179
Varianz 43	Zustand 73, 80
Variation 9	Zwei-Drittel-Gesetz 61