

Jörg Bewersdorff

Glück, Logik

**Mathematik
im Spiel –
Methoden,
Ergebnisse
und Grenzen**

und Bluff

3. Auflage

Einführung

Das Abenteuergefühl ist ein Element des Spiels. Wir setzen uns der Ungewissheit des Schicksals aus und erleben, wie wir es durch unsere eigene Tätigkeit in den Griff bekommen.
Alex Randolph, Spieleautor¹

Die Ungewissheit im Gesellschaftsspiel

Warum spielen wir? Woher rührt der Reiz eines Spiels? Was bringt Menschen dazu, oft stundenlang zu spielen? Wo bleibt die Langweile, wenn immer wieder das gleiche Spiel gespielt wird? Wirklich das gleiche Spiel?

Wirklich gleich bleiben bei einem Spiel nur seine Regeln, Verlauf und Ausgang ändern sich hingegen von Partie zu Partie. Die Zukunft bleibt zunächst im Dunklen – wie im richtigen Leben, aber auch wie im Roman, im Spielfilm und beim sportlichen Spiel. Das sorgt für Unterhaltung und erzeugt zugleich Spannung.

Verstärkt wird die Spannung durch die Möglichkeit zum Gewinn. Jeder Spieler hofft zu gewinnen – um einen materiellen Gewinn zu erlangen, in der Hoffnung auf ein kurzes Glücksgefühl, als Selbstbestätigung oder im Hinblick auf Anerkennung. Egal, um was es „geht“, jeder Spieler kann hoffen. Sogar ein Verlierer darf wieder Hoffnung schöpfen, wenn das Spiel weiter geht: „Neues Spiel – neues Glück“. Dabei wirkt die Hoffnung auf einen Gewinn oft stärker als das Wissen über schlechte Gewinnchancen. Die Popularität von Kasino- und Lotteriespielen beweist das ständig neu.

Unterhaltung und allseitige Gewinnhoffnung haben dieselbe Basis, nämlich die Abwechslung im Spiel. Durch sie bleiben die Spieler lange im Ungewissen über die weitere Entwicklung einer Partie bis hin zu deren Resultat. Wie aber kommt es zu dieser Ungewissheit? Welche Mechanismen des Spiels verursachen sie? Bereits anhand von Spielen wie Roulette, Schach und Pokern lassen sich drei prinzipiell verschiedene Typen von Ursachen erkennen:

1. Zufall.
2. Vielfältige Kombinationen der möglichen Züge.
3. Unterschiedlicher Informationsstand der einzelnen Spieler.

1. Zufällige Einflüsse treten bei Gesellschaftsspielen in der Hauptsache beim Würfeln auf, ebenso beim Mischen von Spielkarten und -steinen. Der Verlauf einer Partie wird dann im Rahmen der Spielregeln sowohl von Entscheidungen der Spieler, als auch den Ergebnissen zufälliger Prozesse bestimmt. Dominiert der Einfluss des Zufalls gegenüber denen der Spieler, spricht man von Glücksspielen. Bei reinen Glücksspielen ist die Entscheidung eines

¹ Zitiert nach Spielbox 1985/1, S. 30. Alex Randolph ist Autor so bekannter Spiele wie Twixt, Geister und Hol's der Geier sowie Mitautor von Sagaland. Die vollständige Liste mit über fünfzig Titeln findet man im jährlich neu erscheinenden Taschenbuch *Spiel* des Friedhelm Merz Verlages, Bonn.

Spielers über die Teilnahme und die Höhe des Einsatzes bereits die wichtigste. Glücksspiele, die um Geld gespielt werden, unterliegen traditionell gesetzlichen Reglementierungen^{1,2}.

2. Im Allgemeinen erhalten die Spieler während des Verlaufs einer Partie in genau festgelegten Situationen die Gelegenheit zu handeln. Zur Auswahl stehen dabei bestimmte, durch die Spielregeln fixierte Handlungsmöglichkeiten. Ein Spielabschnitt, der genau eine solche Handlungsmöglichkeit eines Spielers umfasst, wird Zug genannt. Bereits nach wenigen Zügen können sich die erlaubten Möglichkeiten zu einer kaum noch überschaubaren Vielfalt kombinieren, so dass die Konsequenzen eines einzelnen Zuges nur noch schwer zu erkennen sind. Genau diesem Umstand verdanken Schachaufgaben vom Typ „Matt in zwei Zügen“ ihre Schwierigkeit. Spiele, bei denen die Ungewissheit ganz auf den vielfältigen Zugmöglichkeiten beruht, werden kombinatorische Spiele genannt. Bekannte Vertreter dieser Klasse von Spielen sind Brettspiele wie Schach, Go, Mühle, Dame, Halma und Reversi. Zu den Spielen, die sowohl kombinatorische wie zufällige Elemente besitzen, gehören Backgammon und „Mensch ärgere dich nicht“, wobei der kombinatorische Charakter beim Backgammon deutlich ausgeprägter ist als beim „Mensch ärgere dich nicht“.

3. Eine dritte Ursache, die bei Spielern eine Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf verursachen kann, entsteht, wenn die Spieler unterschiedliche Informationen über den erreichten Spielstand besitzen und damit ein einzelner Spieler nicht unbedingt die Informationen hat, über die die Spieler insgesamt verfügen. So muss ein Pokerspieler seine Entscheidungen treffen, ohne dass er die Karten seiner Gegner kennt. Man könnte nun argumentieren, dass auch beim Backgammon gezogen werden muss, ohne die künftigen Würfelresultate zu kennen. Jedoch besteht zwischen Pokern und Backgammon ein gravierender Unterschied: Die weiteren Würfelresultate kennt kein Spieler, hingegen sind die bereits verteilten Karten einem Teil der Spieler bekannt – jeder sieht zunächst nur seine eigenen Karten. Spiele, deren Teilnehmer vorwiegend aufgrund solcher imperfekter Information im Ungewissen über den weiteren Spielablauf sind, werden strategische Spiele genannt; in reiner Form sind sie allerdings sehr selten. Imperfekte Information ist ein typisches Element der meisten Kartenspiele wie Pokern, Skat und Bridge. Bei den Brettspielen Geister und Stratego beruht die imperfekte Information darauf, dass man zunächst nur den Ort, nicht aber den Typ der gegnerischen Steine kennt³. Bei Diplomacy⁴ und Papier-Stein-Schere⁵ ziehen die Spieler gleich-

² Römische Zahlen I, II, ... weisen auf – zumeist umfangreichere – Anmerkungen am Ende des Buches hin.

³ Geister und Stratego sind Brettspiele für zwei Personen, bei denen jeder Spieler von den Steinen seines Gegners nur die neutrale Rückseite sieht. Zunächst sind einem Spieler also nur die eigenen Spielsteine und die Positionen der gegnerischen Steine bekannt. Bei Geister, das auf einem Schachbrett mit je vier guten und schlechten Geistern auf beiden Seiten gespielt wird, werden nur die geschlagenen Figuren enttarnt. Bei Stratego ist die Schlagkraft einer Figur abhängig vom militärischen Rang. Daher muss eine Figur zum Zeitpunkt eines Schlagabtauschs dem Gegner offen gelegt werden.

Die einfachen Regeln von Geister und eine kommentierte Partie findet man in Spielbox 1984/3, S. 37-39. Taktische Hinweise zu Stratego sind in Spielbox 1983/2, S. 37 f. beschrieben.

⁴ Diplomacy ist ein Klassiker unter den Gesellschaftsspielen. Erfunden wurde es 1945 von Alan Calhmer. Unter Einschluss von Absprachen, die zwischen den Mitspielern getroffen werden können, sind entscheidende Regionen des Spielplans, der Europa vor dem Ersten Weltkrieg darstellt, unter eigene Kontrolle zu stellen. Der besondere Charakter von Diplomacy rührt daher, dass das Schließen und Aufkündigen von Bündnissen geheim gegenüber Dritten verhandelt werden kann. Einen Überblick über Diplomacy vermittelt ein Artikel in Spielbox 1983/2, S. 8-10 sowie ein vom Erfinder verfasstes Kapitel in David Pritchard (ed.), *Modern board games*, London 1975, S. 26-44.

zeitig, so dass jedem Spieler die Information über den aktuellen Zug der Gegner fehlt. Wie sich die imperfekte Information in einem Spiel konkret auswirkt, lässt sich am besten verdeutlichen, wenn die Spielregeln so abgeändert werden, dass ein neues Spiel mit perfekter Information entsteht. Bei Kartenspielen müssen dazu die Spieler ihre Karten offen auslegen; Poker würde auf diese Weise zur Farce, Skat bliebe immerhin ein kombinatorisch interessantes Spiel ähnlich der halb-offenen Zwei-Personen-Variante. Neben dem Spiel Papier-Stein-Schere, bei dem es sich um ein rein strategisches Spiel handelt, erkennt man auf diese Weise auch Pokern als ein überwiegend strategisches Spiel.

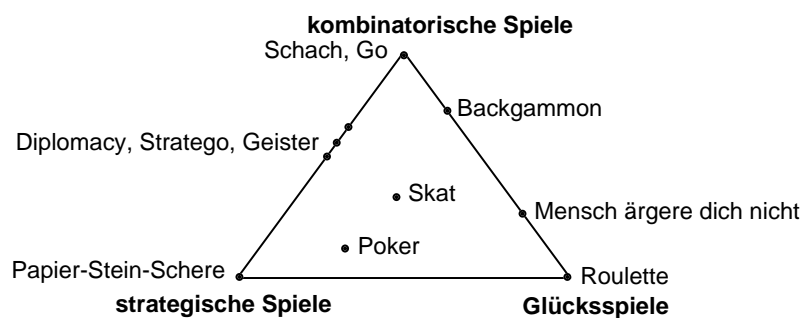


Bild 1 Die drei Ursachen der Ungewissheit in Gesellschaftsspielen: Gewonnen wird mit *Glück, Logik und Bluff*.

Zu fragen bleibt, ob die Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf noch auf anderen, bisher nicht erkannten Ursachen beruhen kann. Untersucht man eine Vielzahl von Spielen nach solchen Ursachen, dann stößt man im Wesentlichen auf die folgenden Erscheinungen:

- Das Ergebnis eines Spieles kann von der körperlichen Geschicklichkeit und Leistungsfähigkeit abhängen. Außer den Sport- und Computerspielen, die sicherlich nicht zu den Gesellschaftsspielen gehören, ist beispielsweise Mikado ein Spiel, das manuelle Geschicklichkeit erfordert.
- Die Spielregeln an sich können den Spielern zum Teil unklar sein. Insbesondere in der Lernphase komplizierter Spiele kommt es zu solchen Situationen. In anderen Fällen ergeben sich Zweifelsfälle zwangsläufig aus der Natur des Spiels. So kann es beim Kreuzworträtsel-artigen Spiel Scrabble unklar sein, ob ein Wort zulässig ist oder nicht. Und selbst beim Skat bleibt das in Altenburg tagende Skatgericht bei der Klärung von Streitfragen nicht unbeschäftigt, auch wenn es meist nur mit nebensächlichen Details befasst ist.
- Ein unvollkommenes Gedächtnis vergrößert nicht nur beim Memory die persönliche Ungewissheit. Allerdings ist diese Art der Ungewissheit keine objektive Eigenschaft des betreffenden Spiels.

Im Vergleich zu Zufall, Kombinationsreichtum und unterschiedlichen Informationsständen können die zuletzt genannten Phänomene allesamt vernachlässigt werden. Keins von ihnen

⁵ Zwei Spieler entscheiden völlig frei, aber gleichzeitig für je eine der drei Alternativen „Papier“, „Stein“ oder „Schere“. Haben beide Spieler die gleiche Wahl getroffen, endet die Partie unentschieden. Ansonsten übertrifft („schleift“) der „Stein“ die „Schere“, das „Papier“ schlägt („umwickelt“) den „Stein“, und die „Schere“ übertrifft („schneidet“) das „Papier“.

ist als typische und objektive Ursache für die Ungewissheit innerhalb eines Gesellschaftsspiels anzusehen.

Spiel und Mathematik

Will ein Spieler die Gewinnaussichten zu seinen Gunsten verbessern, muss er zunächst versuchen, seine persönliche Ungewissheit möglichst weitgehend zu überwinden, um dann die Konsequenzen seiner möglichen Handlungen abzuwägen. Wie er dabei vorzugehen hat, hängt selbstverständlich davon ab, welche konkreten Ursachen für seine Ungewissheit verantwortlich sind: Will ein Spieler beispielsweise entscheiden, ob er an einem Glücksspiel teilnehmen soll oder nicht, dann muss er die Gewinnchancen dahingehend abschätzen, ob sie im Vergleich zum Einsatz attraktiv sind. Ein Schachspieler dagegen hat zu seinem ins Auge gefassten Zug alle möglichen Gegenzüge zu prüfen und zu jedem von ihnen mindestens eine erfolgreiche Antwort parat zu haben. Ein Pokerspieler schließlich muss versuchen zu ergründen, ob das hohe Gebot seines Gegners auf einem guten Blatt basiert oder ob es sich nur um einen Bluff handelt. Alle drei Probleme lassen sich nicht nur im Einzelfall spielerisch, sondern auch in prinzipieller Hinsicht untersuchen. Welche mathematische Methoden dafür entwickelt wurden, soll im vorliegenden Buch anhand von möglichst plakativen Beispielen vorgestellt werden:

- Glücksspiele können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert werden. Diese mathematische Disziplin, die heute in vielfältiger Weise in Natur-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften angewendet wird, verdankt sogar ihre Entstehung im 17. Jahrhundert dem Wunsch, die Gewinnchancen von Glücksspielen berechnen zu können.
- Für die kombinatorischen Elemente in Spielen gibt es keine einheitliche Theorie. Jedoch können mit den unterschiedlichsten mathematischen Methoden sowohl prinzipielle als auch für Einzelfälle konkrete Resultate erzielt werden.
- Ausgehend von den strategischen Komponenten eines Spieles wurde eine eigene mathematische Disziplin begründet, die so genannte Spieltheorie. Spiele fungieren dort als Modell, auf deren Basis interaktive, ökonomische Prozesse in Abhängigkeit von getroffenen Entscheidungen untersucht werden.

Für alle drei Spieltypen und ihre mathematischen Methoden gilt, dass mit Hilfe von Computern ansonsten unerreichbare Anwendungen realisiert werden können. Aber auch unabhängig von der Entwicklung immer schnellerer Computer hat es bei den betreffenden mathematischen Theorien im 20. Jahrhundert große Fortschritte gegeben. Das mag den einen oder anderen mathematischen Laien vielleicht überraschen – besitzt die Mathematik doch oft völlig zu unrecht den Ruf, ihre Entwicklung sei schon lange abgeschlossen.

Der Ausgangspunkt der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** liegt in Fragen wie derjenigen, welcher Spieler in einem Glücksspiel die besten Chancen hat zu gewinnen. Zentraler Begriff ist die Wahrscheinlichkeit, die als Maß für die Gewissheit interpretiert werden kann, mit der ein zufälliges Ereignis eintritt. Für Glücksspiele interessiert natürlich letztlich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass ein bestimmter Spieler gewinnt. Häufig muss aber nicht nur der Gewinn als solches, sondern zugleich auch seine Höhe berücksichtigt werden. Zu berechnen sind dann der durchschnittliche Gewinn und das mit dem Spiel verbundene Risiko. Aber

nicht immer muss ein Spiel vollständig analysiert werden, beispielsweise dann, wenn nur unterschiedliche Zugmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen sind und das im direkten Vergleich geschehen kann. Bei Wettrennen auf Würfelbasis stellen sich dabei Fragen der Art, wie lange ein Spielstein durchschnittlich dafür braucht, eine bestimmte Wegstrecke zurückzulegen. Besonders kompliziert sind solche Berechnungen dann, wenn wie beim Leiterspiel ein Spielstein auch wieder zurückfallen kann. Auch die Antwort auf die Frage nach der Bevorzugung von bestimmten Feldern beim Monopoly verlangt ähnliche Berechnungstechniken. Schwierig zu analysieren sind ebenso solche Glücksspiele, die ausgeprägte kombinatorische Spielelemente beinhalten. Erstmals bewältigt wurden solche Schwierigkeiten bei der Analyse des Black Jacks.

Kombinatorische Spiele, namentlich die traditionsreichen Vertreter Schach und Go, gelten als Spiele mit hohem intellektuellen Anspruch. Schon früh in der Entwicklungsgeschichte der Rechenmaschinen reifte daher der Wunsch heran, in Maschinen ebenbürtige Spielgegner finden zu können. Wie aber lässt sich das realisieren? Dafür benötigt werden Rechenverfahren, mit denen ausreichend gute Züge gefunden werden können. Kann die Güte eines Zuges aber überhaupt eindeutig bewertet werden oder hängt sie nicht immer von der gegnerischen Antwort ab? Immerhin ist der Suchverfahren und Computertechnik umfassende aktuelle Stand der Technik beeindruckend. Ein durchschnittlicher Schachspieler besitzt nämlich gegen die besseren Schachprogramme kaum noch eine Chance. Aber nicht nur Schach war Gegenstand des mathematischen Interesses. Für viele Spiele konnten, zum Teil auf überraschend einfache Weise, sichere Gewinnstrategien gefunden werden. Bei anderen Spielen kann seltsamerweise nur bestimmt werden, welcher Spieler theoretisch stets gewinnen kann, ohne dass bis heute eine Gewinnstrategie konkret bekannt ist. Einige dieser Spiele besitzen sogar Eigenschaften, die kaum eine Hoffnung bestehen lassen, je eine solche Gewinnstrategie zu finden.

In welcher Weise sich strategische Spiele prinzipiell von zufälligen und kombinatorischen Spielen unterscheiden, davon handeln die Grundlagen der **Spieltheorie**. Am Beginn steht eine mathematisch formale Definition eines Spiels. Charakterisiert wird ein Spiel durch seine Regeln und diese umfassen die folgenden Angaben:

- Die Anzahl der Mitspieler.
- Zu jedem Spielstand die Aussage darüber,
 - wer am Zug ist,
 - welche Zugmöglichkeiten für den betreffenden Spieler bestehen und
 - auf Basis welcher Informationen er seine Entscheidung zu treffen hat.
- Für beendete Partien, wer wie viel gewonnen hat.
- Bei Zufallszügen, wie wahrscheinlich die möglichen Ergebnisse sind.

Als eigenständige Disziplin entstand die Spieltheorie erst 1944, als fast aus dem Nichts eine monumentale Monographie über die Theorie der Spiele erschien. Auch wenn sich dieses Werk an verschiedenen Stellen Spielen wie Schach, Bridge und Pokern widmet, sind für die Spieltheorie wirkliche Gesellschaftsspiele im Vergleich zu ökonomischen Prozessen eigentlich nachrangig. Dass sich Spiele überhaupt als Modell für reale Abläufe eignen, überrascht eigentlich nicht. Schließlich sind viele Spielelemente Konflikte um Geld, Macht oder gar Leben entlehnt. Insofern bietet sich die „Umkehrung“ geradezu an, dass heißt, die Interaktion von Individuen – ob in Konkurrenz oder in Kooperation – auf der Basis eines an Spielen angelehnten Modells zu beschreiben und zu untersuchen. Die weitgehende Idealisierung ist da-

bei genauso unvermeidbar, wie es bei anderen Modellen der Fall ist, etwa wenn in der Physik eine Masse als auf einen Punkt konzentriert angenommen wird.

Über dieses Buch

Entsprechend der beschriebenen Systematik gliedert sich der nachfolgende Text in drei Teile, in denen nacheinander zufällige, kombinatorische und strategische Spielelemente mathematisch untersucht werden. Jeder der drei Teile umfasst mehrere Kapitel, die jeweils ein abgegrenztes Problem – meist ein einzelnes Spiel oder Spielelement – zum Gegenstand haben.

Um einen möglichst breiten Leserkreis erreichen zu können, wurde bewusst von einer Darstellung abgesehen, wie sie im Hinblick auf Allgemeinheit, Formalismus und Vollständigkeit in Lehrbüchern üblich und angebracht ist. Im Blickpunkt stehen vielmehr Ideen, Begriffe und Techniken, die soweit vermittelt werden, dass sie auf andere Spiele übertragen werden können.

Aufgrund der problemorientierten Themenauswahl differiert das mathematische Niveau bei den verschiedenen Kapiteln zum Teil erheblich. Obwohl Bezüge auf vorangegangene Kapitel zahlreich sind, können die Kapitel oft unabhängig voneinander gelesen werden. Jedes Kapitel beginnt mit einer, manchmal mehr oder weniger rhetorisch gemeinten Frage, die zugleich Natur und Schwierigkeit des im betreffenden Kapitel behandelten Problems offenbart. Dem (der) mathematisch bestens vorgebildeten Leser(in)⁶, für den (die) der hier gebotene Überblick in vielen Fällen zu oberflächlich und unvollständig bleiben muss, ermöglicht diese Struktur eine schnelle und gezielte Auswahl der für ihn (sie) interessanten Teile – die angegebene Fachliteratur weist den weiteren Weg. Ebenso zum Weiterlesen anregen sollen die angeführten Zitate sowie die Ausblicke auf mathematische Hintergründe und verwandte, außerhalb des eigentlichen Themenbereichs liegende Probleme und Sachverhalte.

Deutlichen Wert gelegt wird auf die historische Entwicklung und zwar zum einen, weil zumindest der jüngere Aufschwung der Mathematik weit weniger bekannt ist als der der Naturwissenschaften, zum anderen, weil es durchaus spannend sein kann, persönlichen Irrtum und Erkenntnisgewinn der zeitraffermäßig verkürzten Entwicklung zuordnen zu können. Wie stark die mathematische Forschung auch im – nicht unbedingt repräsentativen – Bereich der Spiele gerade in den letzten Jahrzehnten vorangeschritten ist, macht ein Vergleich mit thematisch ähnlich abgegrenzten, im Detail allerdings oft anders ausgerichteten Zusammenstellungen deutlich, deren Erscheinen vor der Entdeckung vieler der hier beschriebenen Ergebnisse datiert ist:

⁶ *Der Spieler, der Verlierer, sein fehlerhafter Zug* – alle diese Bezeichnungen sind im folgenden genauso wenig geschlechtsspezifisch gemeint wie *der Hund, die Katze und das Pferd*. Die Möglichkeit, mathematisch-formal in *dem* Spieler nicht *eine* Person, sondern auch in grammatikalischer Sicht geschlechtsneutral *das* Element einer entsprechenden Menge zu sehen, erschien unter dem Blickwinkel der Verständlichkeit genauso wenig sinnvoll wie der ständige Gebrauch doppelter Genera.

- René de Possel, *Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion*, Paris 1936, Reprint in: Hevre Moulin, *Fondation de la théorie des jeux*, Paris 1979
- R. Vogelsang, *Die mathematische Theorie der Spiele*, Bonn 1963;
- N. N. Worobjow, *Die Entwicklung der Spieltheorie*, Berlin (-Ost) 1975 (russ. Orig. 1973) – Hauptgegenstand ist die Spieltheorie als mathematische Disziplin, jedoch wird für die Theorien von Glücksspielen, kombinatorischen und strategischen Spielen in I. §§2-5 ein Abriss der historischen Entwicklung gegeben⁷;
- Richard A. Epstein, *The theory of gambling and statistical logic*, New York 1967 (erweiterte Neuauflage 1977);
- Edward Packel, *The mathematics of games and gambling*, Washington 1981.
- John D. Basley, *The mathematics of games*, Oxford 1989.
- *La mathématique des jeux*, Bibliothèque pour La Science, Paris 1997 – Beiträge zum Thema Spiel und Mathematik der französischen Ausgabe von Scientific American, die nur zum Teil auch in anderen Länderausgaben veröffentlicht wurden.

Nicht versäumen möchte ich es, meinen Dank an all jene auszusprechen, die bei der Entstehung dieses Buchs behilflich waren: Elwyn Berlekamp, Richard Bishop, Olof Hanner, Julian Henny, Daphne Koller, Martin Müller, Bernhard von Stengel und Baris Tan erläuterten mir freundlicherweise ihre Forschungsergebnisse. Bernhard von Stengel verdanke ich darüber hinaus einige Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge und nicht zuletzt die Ermutigung, den Weg zu einer Publikation zu suchen. Angesichts des umfangreichen Quellenstudiums nicht vergessen werden soll die mir zuteil gewordene Unterstützung durch Mitarbeiter der von mir genutzten Bibliotheken – stellvertretend auch für die anderen seien hier nur die Bibliothek des Mathematischen Instituts in Bonn, die Bibliothek des Instituts für Diskrete Mathematik in Bonn sowie die Universitätsbibliotheken Bonn und Bielefeld genannt. Frauke Schindler vom Lektorat des Vieweg-Verlages und Karin Buckler haben viel dazu beigetragen, die Zahl *meiner* Fehler zu verringern. Dem Vieweg-Verlag, namentlich seiner Programmleiterin Ulrike Schmickler-Hirzebruch, habe ich dafür zu danken, diese sicher aus dem üblichen Rahmen fallende Zusammenstellung ins Verlagsprogramm aufgenommen zu haben. Last not least gilt mein ganz besonderer Dank meiner Frau Claudia, deren Verständnis ich in den letzten Jahren leider viel zu oft strapaziert habe.

Vorwort zur zweiten Auflage

Der erfreuliche Umstand, dass die erste Auflage nach nur zwei Jahren vergriffen ist, gibt mir Gelegenheit, zwischenzeitlich entdeckte Druckfehler zu beseitigen. Außerdem konnten einige Literaturverweise und Hinweise auf neuere Untersuchungen ergänzt werden. Danken möchte ich Hans Riedwyl, Jürg Nievergelt und Avierzi S. Fraenkel für ihre Anmerkungen.

Hinweisen möchte ich schließlich noch auf meine Web-Seite www.bewersdorff-online.de, auf der ich Ergänzungen und Korrekturen veröffentliche.

⁷ Darüber hinaus verdankt der Autor den Ausführungen Worobjows aus Teil I wesentliche Einsichten, wie sie insbesondere auch in die Einführung eingeflossen sind.

Vorwort zur dritten Auflage

Wieder habe ich aufmerksamen Lesern zu danken, die mich freundlicherweise auf Druckfehler in vorangegangenen Auflagen hingewiesen haben: Pierre Basieux, Ingo Briese, Dagmar Hortmeyer, Jörg Klute, Norbert Marrek, Ralph Rothemund, Robert Schnitter und Alexander Steinhansens. In dieser Hinsicht besonders danken möchte ich David Kramer, der derzeit das vorliegende Buch ins Englische übersetzt.

Die Notwendigkeit zu inhaltlichen Ergänzungen ergaben sich aufgrund von einigen zwischenzeitlich publizierten Arbeiten, darunter insbesondere Dean Allemangs Untersuchung über die Misère-Version von Nim-Spielen sowie Elwyn Berlekamps Idee des Environmental Go. Auch der Anregung von Lesern, neuere Ansätze bei Spielbaum-Suchverfahren zu ergänzen, habe ich gerne entsprochen.

JÖRG BEWERSDORFF⁸

⁸ Unter joerg.bewersdorff@t-online.de sind Hinweise auf Fehler und Unzulänglichkeiten willkommen. Auch Fragen werden, soweit es mir möglich ist, gerne beantwortet.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Einführung | V |
| Die Ungewissheit im Gesellschaftsspiel | V |
| Spiel und Mathematik | VIII |
| Über dieses Buch..... | X |
| Vorwort zur zweiten Auflage..... | XI |
| 1 Glücksspiele | 1 |
| 1.1 Würfel und Wahrscheinlichkeit | 1 |
| 1.2 Warten auf die Doppel-Sechs | 4 |
| 1.3 Lottotipps – ‚gleicher als gleich‘? | 7 |
| 1.4 Gerecht teilen – aber wie?..... | 14 |
| 1.5 Rot und Schwarz – das Gesetz der großen Zahlen | 17 |
| 1.6 Unsymmetrische Würfel: Brauchbar oder nicht? | 22 |
| 1.7 Wahrscheinlichkeit und Geometrie..... | 25 |
| 1.8 Zufall und mathematische Bestimmtheit – unvereinbar? | 27 |
| 1.9 Die Suche nach dem Gleichmöglichen | 34 |
| 1.10 Gewinne im Spiel: Wahrscheinlichkeit und Wert | 38 |
| 1.11 Welcher Würfel ist der beste?..... | 44 |
| 1.12 Ein Würfel wird getestet | 46 |
| 1.13 Die Normalverteilung: Wie lange noch zum Ziel?..... | 51 |
| 1.14 Nicht nur beim Roulette: Die Poisson-Verteilung | 59 |
| 1.15 Wenn Formeln zu kompliziert sind: Die Monte-Carlo-Methode | 62 |
| 1.16 Markow-Ketten und Monopoly | 69 |
| 1.17 Black Jack: Ein Märchen aus Las Vegas | 81 |
| 2 Kombinatorische Spiele | 94 |
| 2.1 Welcher Zug ist der beste?..... | 94 |
| 2.2 Gewinnaussichten und Symmetrie..... | 102 |
| 2.3 Ein Spiel zu dritt | 110 |
| 2.4 Nim: Gewinnen kann ganz einfach sein! | 115 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.5 | Lasker-Nim: Gewinn auf verborgenem Weg..... | 118 |
| 2.6 | Schwarz-Weiß-Nim: Jeder zieht mit seinen Steinen | 125 |
| 2.7 | Ein Spiel mit Domino-Steinen: Wie lange ist noch Platz? | 137 |
| 2.8 | Go: Klassisches Spiel mit moderner Theorie..... | 146 |
| 2.9 | Misère-Spiele: Verlieren will gelernt sein!..... | 167 |
| 2.10 | Der Computer als Spielpartner..... | 174 |
| 2.11 | Gewinnaussichten – immer berechenbar? | 191 |
| 2.12 | Spiele und Komplexität: Wenn Berechnungen zu lange dauern | 201 |
| 2.13 | Memory: Gutes Gedächtnis und Glück – sonst nichts?..... | 211 |
| 2.14 | Backgammon: Doppeln oder nicht?..... | 217 |
| 2.15 | Mastermind: Auf Nummer sicher | 231 |
| 3 | Strategische Spiele..... | 239 |
| 3.1 | Papier-Stein-Schere: Die unbekanntenen Pläne des Gegners..... | 239 |
| 3.2 | Minimax kontra Psychologie: Selbst beim Pokern? | 246 |
| 3.3 | Poker-Bluff: Auch ohne Psychologie?..... | 253 |
| 3.4 | Symmetrische Spiele: Nachteile sind vermeidbar, aber wie?..... | 257 |
| 3.5 | Minimax und Lineare Optimierung: So einfach wie möglich | 267 |
| 3.6 | Play it again: Aus Erfahrung klug?..... | 273 |
| 3.7 | Le Her: Tauschen oder nicht? | 277 |
| 3.8 | Zufällig entscheiden – aber wie? | 282 |
| 3.9 | Optimal handeln – effizient geplant..... | 289 |
| 3.10 | Baccarat: Ziehen bei Fünf? | 301 |
| 3.11 | Pokern zu dritt: Vertrauenssache? | 304 |
| 3.12 | „QUAAK!“ – (k)ein Kinderspiel | 313 |
| 3.13 | Mastermind: Farbcodes und Minimax | 320 |
| | Stichwortverzeichnis..... | 325 |
| | Anmerkungen..... | 331 |

Stichwortverzeichnis

A

Additionsgesetz 5, **6**, 31, 33
Allemang, Dean XII, 172
Alpha-Beta-Algorithmus 181, 187, 190
Anreiz 142
äquivalente Positionen 119, 121, 127,
173
Arbuthnot, John 47
A-Strategie 178, 180
Aufenthalt 73
Aufenthaltswahrscheinlichkeit 78
Ausgleich 17
Ausnahmeposition 167
Austausch-Schritt **263**, 271

B

Babbage, Charles 95, 175
Baccarat 244, **301**, 302, 303
Backgammon VI, 39, 51, **57**, 102, **217**
Doppel 218
Jacoby-Paradoxon 222
Redoppel 218
Running Game 57, 223
stetiges Modell 225
Verdopplungswürfel 218, 220
Zwei-Steine-Modell 226
Banerji, Ranan 171
Baum 202
Berechenbarkeit 193, 200
Berlekamp, Elwyn XI, XII, 125, 136,
152, 159, 164, 166
Bernoulli, Jakob 1, 2, 3, 5, 19
Bernoulli, Niklaus 278, 279
Bestimmtheitssatz **96**, 97, 98, **102**, 103,
104, 114, 168, 212, 241, 304
binäres Zahlensystem 116
Binomialkoeffizient **10**, 16
Binomialverteilung **17**, 19, 54, 60
Bishop, Richard XI, 77
Black Box **237**
Black Jack IX, 36, **81**
Count 89, 90
doppeln 82, 87, 92

High-Low-System 90, 92

Softhand 83, 86

teilen 82, 87, 92

versichern 82

Blockbusting 148, 149

Bluff VIII, 254, 283, 288

Bohlmann, Georg 31, 33

Bolyai, Johann von 197

Border-to-Border-Spiel 107

Borel, Émile 19, 244, 247, 302

Bortkiewicz, Ladislaus von 62

Bouton, Charles 116, 118, 120

Bridge VI, IX, 310

Bridge-it 107, **109**, 201, 205, 208

Brouwer'scher Fixpunktsatz 249

brute force 178

B-Strategie 178, 183

Buffon, Georges Louis-Leclerc, Comptes
de 25

Buffon'sches Nadelproblem 25, 27, 30,
64

C

Cantelli, Francesco Paolo 19

Cantor, Georg 196

Chaitin, Gregory 31

Chaos 29

Chemin-de-fer 301

Chi-Quadrat-Funktion 68

Chi-Quadrat-Verteilung 69

Chuck-a-Luck 38, 40

Church'sche These 193

Condon, Joe 184

Conway, John Horton 125, 135, 136, 172

Conway-Spiel 133, 151, 152, 163, 164

Cook, Stephen Arthur 209

Cram 137

Craps 22

Cutoff 181

D

Dame VI, 102, 207

Dampfross 51, **56**

Dantzig, George 258, 262

- Dawsons Schach 124
Dedekind, Richard 135
deterministisch 28, 29
Diagonalverfahren 196
Diophant 199
diophantische Gleichung 199
Diplomacy VI
disjunktive Summe **121**, 126, 137, 148, 155, 166
Domino 137
Dreipersonenspiel 110, 112, 113, 304
Dresher, Melvin 252, 322
Dunning, Charles 171
- E**
effizientes Verfahren 204
Einfachheitssatz **132**
Elkies, Noam D. 166
Endknoten 100, 291, 296
Endspiel 96, 185
Entscheidungsproblem 205, 208
Entscheidungs-Sequenz 291, 293
Environmental Go 164, 165
Epimenides 196
Erdős, Paul 56
Ereignis 2, 32
Erfüllbarkeitsproblem 209
Ergebnismenge 32
Erwartung 41
Erwartungswert **40**, 44
Euklid 197
EXPTIME 206
 -vollständig 210
extensive Form 287, 305, 312
- F**
Faktorisierung 209
Fakultät 8
Farkas, Julius 249
fehlerhafte Spielweise 115
Ferguson, T. S. 124, 170
Fermat, Pierre de 5, 15, 195
Fermat'sche Vermutung 195
Feynman, Richard 1
fiktive Partienserie 274, 281
Fisher, Roland Aylmer 280
Flood, Merrill 238, 322
Focus 104
- Forward Pruning 183
Fraenkel, Avierzi S. XI, 173, 211
Freiheitsgrad 69
- G**
Gale, David 108, 266
Gardner, Martin 104, 107, 108, 137
Gasser, Ralph 109, 162
Gefangenendilemma 322
Geister VI, 284
Gerade oder ungerade 239, 240
Gesetz der großen Zahlen **3**, **18**, 49, 62, 64
 schwaches 50
 starkes 19
Gesetz der kleinen Zahlen 62
Gewinnerwartung 41, 104
Gewinnhöhe 38, 40
Gewinnposition 168
Gleichgewicht **114**, 115, 304 *siehe auch*
 Nash-Gleichgewicht
 gleichmöglich 3, 8, 15, 25, 34, 35
Glücksspiel VI, VIII, 1, 280, 290
Go VI, IX, 97, 102, 112, **146**, 147, 151, **155**, 207
 kaltes 158
 mathematisches 152
Gödel, Kurt 197
Gödel'scher Unvollständigkeitssatz 197, 198
Go-Moku 105, 106, 207, 208
Graph 201
Gross, Oliver 109
Größer-oder-gleich-Relation bei Positionen 129
Grundy, Michael 120, 121
Grundy-Wert **121**, 124
Guy, Richard 124, 125, 136
- H**
Hackenbush 125
Halma VI
Halteproblem 194, 195
Hanner, Olof XI, 126, 148
Harsanyi, John 305, 313
Hash-Tabelle 184, 185, 187
Hein, Piet 107, 173
Heiratssatz 106

- Heisenberg, Werner 29
 Henny, Julian XI, 278
 Herda, Hans 173
 heuristische Methoden 182
 Hex 107, **108**, **201**, 203, 205, 206, 208
 Hilbert, David 30, 197, 199
 Hilbert'sche Probleme 31
 Hol's der Geier **313**
 Huygens, Christian 62
 Hypothese 46, 68
 Hypothesentest 47, 54
- I**
- Information IX
 imperfekte VI, **239**, 284
 perfekte **98**, 102, 120, 287
 Informationsmenge **286**, 295, 303
 Informationsstand 99, 241, 284
 inverse Position 127, 134
 Inzentive **142**
- K**
- Kac, Marc 56
 Karmarkar, Narendra 262
 Kegel-Nim 123, 124, 171
 Kempelen, Baron von 95
 Killer-Heuristik 182
 kinetische Gastheorie 28
 Knuth, Donald 135, 233, 323
 Ko 162, 164
 Koalition 112, 114, 115, 308, 311
 Koller, Daphne XI, 296, 300
 Kolmogorow, Andrej 31, 33
 Kombinatorik 8
 kombinatorisches Spiel VI, IX, 94
 Komi 164
 Komplexität 204, 205
 Komplexitätstheorie 203, 205
 konvexe Menge 249
 Kooperation 115
 Koopmans, Tjalling 258
 Koyama, Kenji 236, 324
 Krone und Anker 38
 Kronecker, Leopold 135
 Kuchenregel 103
 Kuhn, Harold 114, 287, 290, 305, 309
 künstliche Intelligenz 174
- L**
- Lai, Toni 236, 324
 Landlord's Game 70
 Laplace, Pierre Simon 3, 5, 8, 28
 Laplace-Modell 22, 25, 32, 35
 Lasker, Emanuel 110, 118, 119, 120, 147, 172
 Lasker-Nim 118, 119, 121, 123, 124
 last move improvement 183
 Le Her **277**, 279, 280, 281, 282, 288, 289
 Lehman's Kriterium 202
 Leiterspiel IX, **67**, **74**
 Lineare Optimierung 209, **259**, 267
 lineare Ungleichungen 258
 Links-Stop 140, 160
 Lobatschewski, Nikolai 197
 Lotto 7, 9, 11, 12, 14, 39, 59
 L-Verbesserung 183
- M**
- Markow, Andree Andrejewitsch 73
 Markow-Kette **69**, 73, 74, **80**
 absorbierende 80
 irreduzible 80
 reguläre 80
 Mastermind **231**, 238, **320**
 durchschnittliche Zuganzahl 235
 Minimax-Strategie 321
 worst case 234
 mathematisches Go 162
 Maximin-Wert **99**
 Maxwell, James Clerk 28
 Mehrpersonenspiel 311
 mit perfekter Information 115
 Memory VII, **211**, 213, 216
 Mensch ärgere dich nicht VI, 39, 51, 217
 Méré, Chevalier de 4, 6, 62
 Milnor, John 126, 140, 148
 Milnor's Ungleichungen 155
 Minimax
 -Prinzip 174
 -Satz **248**, **250**, 252, 253, 262, 304
 -Strategie 100, 267, 273, 278, 280, 289, 314, 321
 -Strategie, relative 282
 -Suche 189
 -Verfahren 187
 -Wert **99**, 140

Misère-Nim 124
Misère-Version 167, 169, 171, 173
Mises, Richard von 31
Mittelwert **141**, 145, 157, 158
Modell IX, 19, 21, 28, 31, 33, 38, 57, 73,
193, 223, 247, 287, 305, 320
Monopoly IX, 69, 76, 80
Monte-Carlo-Methode 62, **63**, 91, 276
Montmort, Pierre Rémond de 278
Morgenstern, Oskar 241, 248, 283, 287,
310
Mühle VI, 102, **109**
Müller, Martin XI, 162, 166
Multiplikationsgesetz **5**, 31, 33, 42

N

Nash, John 105, 107, 305, 313
Nash-Gleichgewicht **305**, 307, 311, 312
Nebenbedingung 259, 298
Negamax-Algorithmus 191
Negascout-Verfahren 183
negative Position 129
Neumann, John von 64, 115, 135, 175,
241, 247, 249, 262, 283, 287, 310,
311
neutrales Spiel 120, 125
Neuwirth, Erich 236
Nievergelt, Jürg XI, 109
Nim **116**, 120, 167, 205, 208
-Addition 116
-Automat 118
-Summe 116, 117
Nimbi **173**, 185
Normalform **101**, 240, 273, 287, 289
Normalverteilung 51, 53, 54, 55, 56
NP 206, 209
-hart 209, 210, 300
-vollständig 209
Nullfenster-Suche 183
Null-Move 183
Nullposition 126, 127, 129
Nullsummenspiel **98**, 247, 248
Nullzug 183

O

oktales Spiel 124, 171, 173
optimale Gegenstrategie 276, 281, 290

P

P (Komplexitätsklasse) 205
Paarungsstrategie 108, 109
Painlevé, Paul 244
Papier-Stein-Schere VI, VII, 94, 95, 98,
99, 101, 239
Parallelenaxiom 197
Pascal, Blaise 4, 15
Pascal'sches Dreieck 10
Pasch 70
Patashnik, Oren 106
Pearson, Karl 68
perfektes Erinnerungsvermögen 284,
287, 289, 295, 300, 307, 314, 320
Permanenz 20
Pi 25, 27, 63
Pivotelement 270
Plambeck, Thane 124, 171
Poe, Edgar Allan 21, 95, 239
Poisson, Simeon Dennis 60
Poisson-Verteilung 59, 60, 61
Poker VI, VII, VIII, IX, 13, 14, 246, **253**,
256, 257, 304
-Modell 247, 274, 283, 285, 288, 291,
296, 305, 311
polynomial beschränkt 204
Position 95
positive Position 129
Primzahl 30, 56, 65
Primzahltest 209
Programm 175
Programmiersprache 52, 63
Prüfgröße 46
PSPACE 206
-hart 210
-vollständig 210
Punktwertungsspiel 155

Q

QUAAK! **313**
Qubic 105, 106

R

radioaktiver Zerfall 30
Randolph, Alex V, 103
Realisierungsgewicht **294**, 296, 298
Realisierungsplan 296
Rechteckregel 270

- Rechts-Stop 140, 160
 Rekursion 188, 189
 relative Häufigkeit **2**, 19, 26, 54
 Reversi VI, 102, 207, 208
 Riedwyl, Hans XI, 13
 Risiko **58**
 Robinson, Julia 276
 Roulette **17**, **55**, 59, 61, 62, 65, 94, 177
 Ruhesuche 178, 180, 187
 Ruin 62, 64
 Ruin-Problem 74, 80
 Russell, Bertrand 197
- S**
- Sackson, Sid 104
 Sattelpunkt **100**, 101, 241, 243
 Satz vom Zahlen-Vermeiden 138, 151
 Scarne, John 7
 Schach VI, IX, 94, 96, 97, 101, 102, 112, 147, **166**, **174**, 207
 -automat 95
 -computer **174**
 Schaltspiel 164
 Schlupfvariable 263, 267
 Schrödinger, Erwin 29
 Schwarz-Weiß-Nim 125
 Scotland Yard 103
 Scrabble VII
 Selten, Reinhard 305, 313
 sequentielle Form 296
 Shannon, Claude 175, 177, 178
 Shannons Switching Game 201
 Shogi 207
 Sibert, William 171
 Sibert-Conway-Zerlegung 171
 Siebzehn-und-Vier 81
 signalisieren 310
 Simplex-Algorithmus **262**, 269, 270, 273, 277, 282, 289
 Simplex-Tableau **269**
 Simulation 64
 Skat VI, VII, 9, 273, 284
 Snakes and Ladders 67
 Spiel
 Definition IX, 287
 gekühltes 144, 158
 rekursives 316
 symmetrisches 240, 244, 252, **257**
 unwesentliches **114**
 Spielbaum **100**, 285
 Spieler
 fiktiver 284
 Team als 284
 Spieltheorie VIII, IX, **248**
 kombinatorische 126
 kooperative 114, 312
 nicht-kooperative 305, 312
 Spight, Bill 166
 Sprague, Roland 120, 121
 Standardabweichung **43**, 44
 Standard-Nim 122, 123
 Standardnormalverteilung 53
 stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung 72
 Statistik **47**
 Stengel, Bernhard von XI, 296, 297
 Steuer 143, 158
 Stichprobenfunktion 46, 68
 Stirling'sche Formel 9
 Strategie **98**, 101, 114, **241**
 dominierte 256
 gemischte **242**, 248, 250, 273, 280, 283, 289, 309
 optimale 100
 reine **242**, 273
 Stratego VI, 284
 Streuung 43
 Subtraktionsspiele 123
 Summe von Conway-Spielen 134
 Symmetrie 2, 4, 18, 23, 35, 46, 55, 68, 102, 114
- T**
- Tabellenkalkulation 52, 216, 275
 Tan, Baris XI, 59
 Teilungsproblem 15
 Temperatur 141, 142, **143**, 145, 157, 164
 texanisches Roulette 103
 Thermograph 143
 Thermostrat 142, **145**
 Thompson, Ken 184
 Thorp, Edward 55, **89**, 93, 229, 231, 303
 Tic-Tac-Toe 105, 106, 108
 transitiv 45
 Travelling-Salesman-Problem 206, 209
 Tschebyschew, Pafnuti Lwowitsch 48

Tschebyschew'sche Ungleichung 48, 54
Tucker, Albert W. 267, 322
Turing, Alan 175, 179, 193
Turing-Maschine 179, 193
Turnier 114
Twixt 103, 107

Ü

Übergangsgleichungen 71
Übergangsmatrix 73, 74
Übergangswahrscheinlichkeit 80
Ulam, Stanislaw 64
unabhängige Ereignisse 18, 36, 73
Ungewissheit V, VI, VII, 94, 239
unscharfe Position 129
unsymmetrischer Würfel 22
Unterprogramm 187
Up 158

V

Varianz **43**
Variation 9
Verhaltensstrategie **282**, 287, 288, 289,
293, 295, 300, 309, 314, 320
Verlustposition 168
Verschiebungsgesetz 138
Versuchsreihe 46
Viaud, D. 235, 238
Vierfarbensatz 106
Vierpersonenspiel 113
Volumen 64
von-Neumann-Maschine 175

W

Wahrscheinlichkeit **2, 3, 32**
bedingte **36**
Formel für die totale 37
geometrische 25
Wahrscheinlichkeitsrechnung VIII, 30
Axiome der 32
Waldegrave 278
Wert eines Spiels **100**
Wiener, Michael 324
Wolf und Schafe 103
Wolfe, David 152, 159, 210
Würfel 1, 46
Würfelsumme 51

Z

zahme Misère-Version 170
zehntes Hilbert'sches Problem 199
zentraler Grenzwertsatz 49, **52**, 56, 59,
64
Zermelo, Ernst 95, 96, 100
Zufall 1, 27, 94, 284
Zufallsexperiment 3, 22, 23, 32, 36
Zufallsgröße **39**, 44
Zufallszahlen 63, **64**
Zufallszug IX
Zug VI, IX
dominierter 132
zulässiger Bereich 261
Zuse, Konrad 175
Zustand 73, 80
Zwei-Drittel-Gesetz 61