Spiele aus mathematischer Sicht

Jörg Bewersdorff
www.bewersdorff-online.de

Mathematikertag 2000
FH Stuttgart – Hochschule für Technik
Stuttgart, 17.11.2000

Zur Person

Promotion: 1985
Universität Bonn / MPI für Mathematik
Zahlentheorie, Algebraische Topologie

Tätigkeit: **MEGA-Spielgeräte**, Limburg, www.mega-spiel.de
(Geschäftsführer)
Entwicklung und Vertrieb von Spielautomaten nach deutschem Recht

GeWeTe, Mechernich, www.gewete.de
(Entwicklungsleiter, Prokurist)
Geldwechsel- und Kassenautomaten

Mega Web, Limburg, www.megaweb-online.de
(Geschäftsführer)
Öffentliche Internet-Terminals

Buch: „Glück, Logik und Bluff,
Mathematik im Spiel: Methoden, Ergebnisse und Grenzen“
Braunschweig (Vieweg) 1998

Gesellschaftsspiele aus mathematischer Sicht:

- Habe ich eine **Aussicht zu gewinnen** und **wie groß** ist sie? Wie läßt sie sich überhaupt quantifizieren?
- Welcher der aktuell möglichen Züge ist der **beste Zug** für mich?
- Sind die **Züge** überhaupt **objektiv vergleichbar**?
- Wie lassen sich **spielende Programme** für Spiele wie Schach, Backgammon und Mastermind realisieren?
- In welcher Beziehung stehen **mathematischer** und **spielerischer Charakter** eines Spiels?
  rechtlich: § 284 StGB, § 33d GewO,
  ludographische Inventarisierung und Klassifizierung.
- Modellierung und Analyse **realer Entscheidungsprozesse** mit Hilfe von Spiel-Modellen; z.B.: Wie lassen sich UMTS-Lizenzen am besten versteigern?

Warum spielen wir?

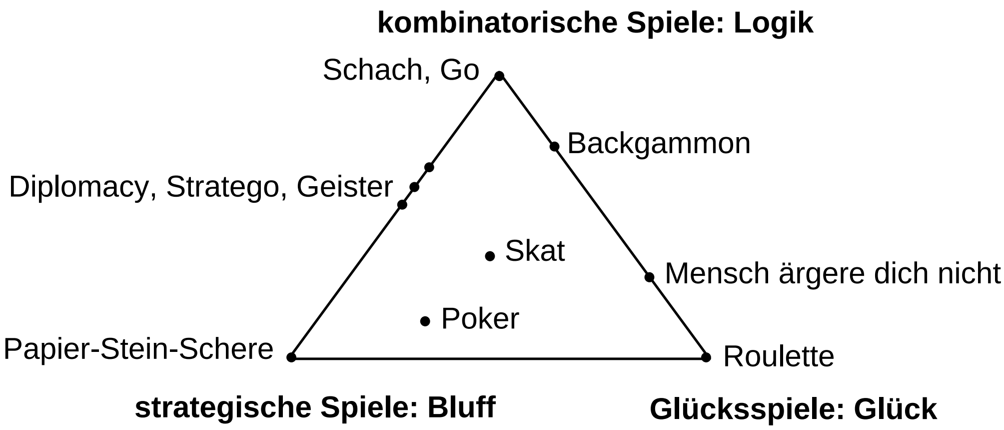
Unterhaltung, Spannung und Hoffnung auf Gewinn

Wodurch?

Ungewißheit – über Verlauf und Ergebnis eines Spiels

Ursachen für die Ungewißheit (Spielmechanismen)**:**

- **Zufall:**
  Würfel, Mischen von Karten
- **Kombinationsreichtum:**
  Vielfalt der möglichen Zugfolgen wie beim Schach
- **imperfekte Information:**
  bei Kartenspielen (jeder kennt nur seine eigene Karten) oder bei simultanen Zügen (Papier-Stein-Schere)



Mathematische Disziplinen:

Glücksspiele:

- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Statistik

kombinatorische Spiele:

- kombinatorische Spieltheorie
- Komplexitätstheorie, Algorithmik
- Spieltheorie

strategische Spiele:

- Spieltheorie

Glücksspiele – mathematische Basis

Wahrscheinlichkeit für den Hausgebrauch**:** Maß für die Sicherheit eines Ereignisses, welches in einem Zufallsexperiment eintreten kann:

- wiederhole ein Experiment möglichst oft:

$$\frac{\text{Anzahl der Experimente, bei denen das Ereignis eintritt}}{\text{Gesamtzahl der Experimente}} \xrightarrow{\text{Trend}} \text{Wahrscheinlichkeit}$$

  (**Gesetz der großen Zahlen**: ein Trend ist nur für relative Häufigkeiten gesichert, ein Trend zum „Ausgleich“ vormaliger Übergewichte besteht nicht);

- sicheres Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 1,
- unmögliches Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 0,
- zueinander symmetrische Ereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, z.B. $^1/_6$ für jedes der sechs Würfel-Ereignisse

Zufallsgröße: z.B. die Höhe des Gewinns in einem Glücksspiel

Erwartungswert (einer Zufallsgröße): z.B. der „faire“ Einsatz eines Glücksspiels

E(X + Y) = E(X) + E(Y)
„fairer“ Einsatz für die Teilnahme an zwei Glücksspielen mit den Gewinnen X und Y;

E(X·Y) = E(X)·E(Y) für **unabhängige** X,Y;
„fairer“ Einsatz, sofern der Gewinn X eines ersten Glücksspiels als Einsatz eines nachfolgenden unabhängigen Glücksspiels Y eingesetzt wird.

Achtung: Petersburger Paradoxon, 1713

Frühe Wahrscheinlichkeitsrechnung („Glücksspieltheorie“)

1222-1268	Anonym: Kombinatorik für 3 Würfel und deren Interpretation als „Chance“
ca. 1400	Anonym: Teilungsproblem: Wie ist der Einsatz bei Abbruch einer Glücksspiel-Serie zu teilen?
später	mehrfach falsche Lösungen zu den beiden erst genannten Problemen (u.a. Leibniz)
1654	**Fermat**, **Pascal** (und **de Méré**) lösen: ♦ Teilungsproblem ♦ Vier Würfe sind genug, um aussichtsreich auf mindestens eine Sechs zu wetten. Aber: Reichen 24 Würfe, um eine günstige Wette auf mindestens eine Doppel-Sechs zu platzieren? Anwort: Nein!
...	**Huygens**, **Laplace**, **Bernoulli** u.a.: Glücksspiele sind Standard- aber nicht alleinige Beispiele (ideale Modellsituationen)

Monopoly

- ♦ Meistverkauftes Wirtschaftsspiel: 185 Mill. seit 1931.
- ♦ Wo winken die besten Renditen?
- ♦ Strategischer Einfluß: kaum beim Ziehen, wohl aber bei den Investitionen.
- ♦ Die 40 Felder unterscheiden sich im Hinblick auf die durchschnittliche Besuchs-Häufigkeit erheblich!
- ♦ Erwartungswert = Miethöhe $\times$ Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten und pro Wurf zu erwartende Mieten:

	Straße	Wahr.	maximale Miete		
			absolut	Erw.	Gruppe
0	Los	0,02889			
1	Badstr.	0,02436	5000	122	
2	Gemeinschaftsfeld	0,01763			
3	Turmstr.	0,02040	9000	184	305
4	Einkommenssteuer	0,02210			
5	Südbahnhof	0,02686	4000	107	
6	Chausseestr.	0,02169	11000	239	
7	Ereignisfeld	0,00972			
8	Elisenstr.	0,02246	11000	247	
9	Poststr.	0,02217	12000	266	752
10	Nur zu Besuch	0,02184			
11	Seestr.	0,02596	15000	389	
12	Elektrizitätswerk	0,02378	1400	33	
13	Hafenstr.	0,02213	15000	332	
14	Neue Str.	0,02457	18000	442	1164
15	Westbahnhof	0,02531	4000	101	
16	Münchener Str.	0,02703	19000	514	
17	Gemeinschaftsfeld	0,02306			
18	Wiener Str.	0,02821	19000	536	
19	Berliner Str.	0,02794	20000	559	1608
20	Frei parken	0,02806			
21	Theaterstr.	0,02594	21000	545	
22	Ereignisfeld	0,01209			
23	Museumsstr.	0,02549	21000	535	
24	Opernplatz	0,02983	22000	656	1736
25	Nordbahnhof	0,02718	4000	109	
26	Lessingstr.	0,02540	23000	584	
27	Schillerstr.	0,02521	23000	580	
28	Wasserwerk	0,02480	1400	35	68
29	Goethestr.	0,02441	24000	586	1750
30	Gefängnis	0,09422			
31	Rathausplatz	0,02501	25500	638	
32	Hauptstr.	0,02438	25500	622	
33	Gemeinschaftsfeld	0,02193			
34	Bahnhofstr.	0,02312	28000	647	1907
35	Hauptbahnhof	0,02243	4000	90	407
36	Ereignisfeld	0,00934			
37	Parkstr.	0,02023	30000	607	
38	Zusatzsteuer	0,02023			
39	Schloßallee	0,02457	40000	983	1590

Zum Opernplatz kommt man 1,48-mal so häufig wie zur Parkstraße!

Monopoly II

Zu erwartende Mieten pro Zug (das entspricht durchschnittlich 1,187 Würfen)**:**

	Miet-erwartung bei Hotels	Rendite eines weiteren Hauses (in Prozent pro Zug) 1.	2.	3.	4.	5.
lila	362	0,5	1,5	4,6	5,4	5,7
hellblau	892	1,0	3,1	9,8	7,2	7,9
violett	1381	0,9	3,1	8,8	5,3	4,3
orange	1909	1,4	4,4	11,9	6,6	6,6
rot	2061	1,2	3,7	9,6	3,8	3,8
gelb	2077	1,3	4,5	9,4	3,5	3,5
grün	2263	1,2	3,9	7,5	2,9	2,6
dunkelblau	1887	1,4	4,9	9,4	3,4	3,4

Wie geht's?

- **Simulation** mit einem Computer-Programm („Monte-Carlo-Methode“)

  oder:

- **Analyse eines mathematischen Modells:**
  reguläre Markoff-Kette mit 120 Zustände; löse lineares Gleichungssystem mit 120 Unbekannten und 121 Gleichungen

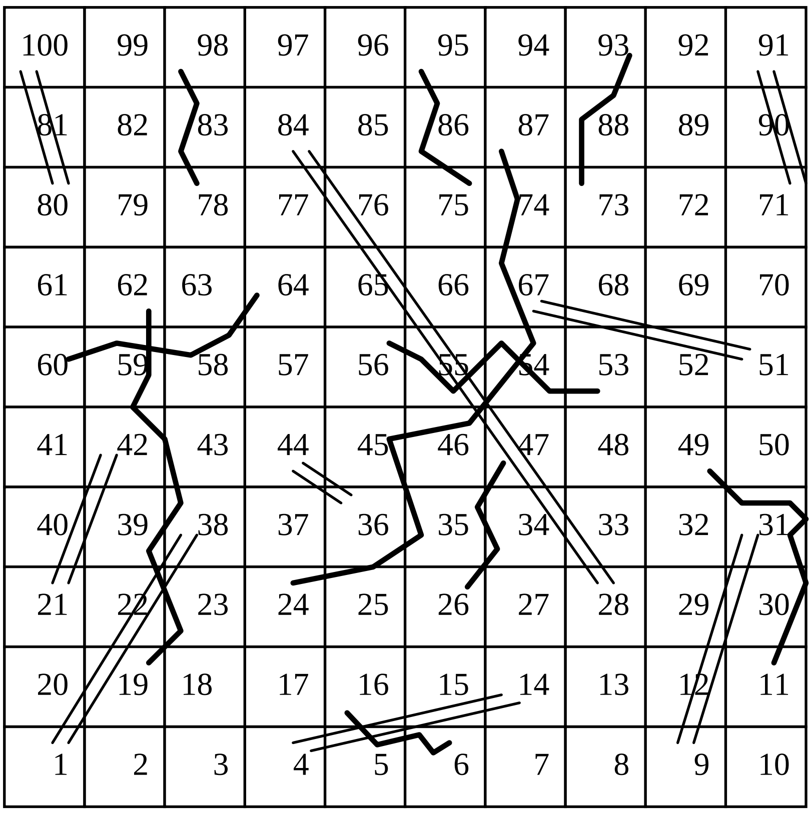
Leiterspiel

- ♦ Das Leiterspiel ist ein reines Glücksspiel (die Spieler haben nichts zu entscheiden): Jeder Spieler zieht eine Figur. Die Weite der Züge wird jeweils durch das Ergebnis eines Würfelwurfs ermittelt.
- ♦ Das Leiterspiel ist mathematisch äquivalent zu einer absorbierenden Markoff-Kette mit dem Ziel als einzigem absorbierenden Zustand.
- ♦ **Wie groß ist die zu erwartende Zuganzahl bis zum Ziel?**

  Iteriere die Transformationsformel für die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder verwende eine direkte Formel auf Basis von

$$(I - Q)^{-1},$$

  wobei Q die Blockmatrix ist, welche die Übergangswahrscheinlichkeiten der nicht absorbierenden Zustände umfaßt.



Leiter: gehe aufwärts **Schlange: gehe abwärts**

Video-Poker

Regeln des Ein-Personen-Spiels (wie sie in tausenden von Video-Slots in Las Vegas verwendet werden):

- ♦ Gespielt wird mit einem Kartenspiel aus 52 Karten.
- ♦ Der Spieler zieht zufällig zunächst 5 Karten.
- ♦ Er wählt daraus 0 bis 5 zu „haltende“ Karten aus, die anderen werden weggelegt und durch die gleiche Anzahl von Karten ersetzt, welche aus den 47 Karten des Reststapels zufällig gezogenen werden.
- ♦ Abhängig von der in der zweiten Ziehung erreichten Poker-Kombination (Drilling, Full House, Straight, ...) wird ein Gewinn ausgezahlt.

Video Poker II

Mathematik:

Für alle möglichen Mengen B von Kartenblättern aus 5 Karten definiert man zunächst:

$$\mu(B) = \sum_{b \in B} \text{Gewinn}(b)$$

Der umfangreichste Teil der Berechnung betrifft die **Optimierung der Halte-Entscheidungen** nach der ersten Ziehung. Dabei ist jedem der

♦ der ca. 2,6 Mill. Kartenblätter

die höchste bedingte Gewinnerwartung

♦ unter den 32 möglichen Halte-Entscheidungen

zu finden. Diese 32 bedingten Gewinnerwartungen hängen ab nur von den gehaltenen Karten k_1, ..., k_s sowie den weggelegten Karten k_{s+1}, ..., k_5:

$$\mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_s \in B \wedge k_{s+1},\ldots,k_5 \notin B\}) / \binom{47}{5-s}$$

Aufgrund von Identitäten wie

$$\mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_4 \in B \wedge k_5 \notin B\}) = \mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_4 \in B\}) - \mu(\{\{k_1,\ldots,k_5\}\})$$

$$\begin{aligned}\mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_3 \in B \wedge k_4,k_5 \notin B\}) = {} & \mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_3 \in B\}) \\ & -\mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_3 \in B \wedge k_4 \notin B\}) \\ & -\mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_3 \in B \wedge k_5 \notin B\}) \\ & +\mu(\{\{k_1,\ldots,k_5\}\})\end{aligned}$$

etc.

reicht es, im ersten Schritt nur Summen der Form

$$\mu(\{B \mid k_1,\ldots,k_s \in B\})$$

zu berechnen (jeweils **entsprechend einer bedingten Gewinnerwartung mit Zurücklegen** der nicht gehaltenen Karten).

Lotto

– gespielt wird gegen die Mitspieler –

„6 aus 49“: Es gibt ca. 14 Mill. (exakt: 13983816) mögliche Kombinationen

Gewinne: Totalisation aller Einsätze und Ausschüttung von 50% (mit festgelegtem Verteilungsschlüssel für die Gewinnklassen)

wichtig: vermeide Tipps, die von vielen anderen getippt werden (Geburtstage, Muster, Ergebnisse anderer Ziehungen)

Auswertung über das Tipp-Verhalten

(Karl Bosch, 6,8 Mill. Tippreihen, Bad.-Württ. 1993; jeder Tipp wäre bei Gleichverteilung 0,49-mal zu erwarten):

1	2	3	4	5	6	~~7~~
8	9	10	11	12	~~13~~	14
15	16	17	18	~~19~~	20	21
22	23	24	~~25~~	26	27	28
29	30	~~31~~	32	33	34	35
36	~~37~~	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

4004-mal getippt

1	2	3	4	5	6	~~7~~
8	9	10	11	12	13	~~14~~
15	16	17	18	19	20	~~21~~
22	23	24	25	26	27	~~28~~
29	30	31	32	33	34	~~35~~
36	37	38	39	40	41	~~42~~
43	44	45	46	47	48	49

3817-mal getippt

1	2	3	4	~~5~~	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	~~27~~	28
29	30	31	32	33	~~34~~	~~35~~
36	~~37~~	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	~~49~~

3698-mal getippt

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

3249-mal getippt

1	2	3	~~4~~	5	6	7
8	9	10	~~11~~	12	13	14
15	16	17	~~18~~	19	20	21
22	23	24	~~25~~	26	27	28
29	30	31	~~32~~	33	34	35
36	37	38	~~39~~	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

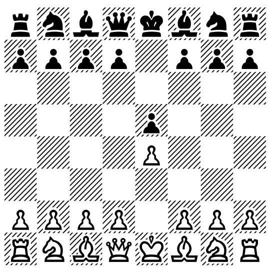
2821-mal getippt

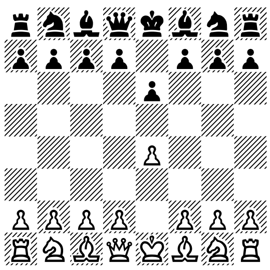
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	~~13~~	14
15	16	17	18	~~19~~	20	21
22	23	24	~~25~~	26	27	28
29	30	~~31~~	32	33	34	35
36	~~37~~	38	39	40	41	42
~~43~~	44	45	46	47	48	49

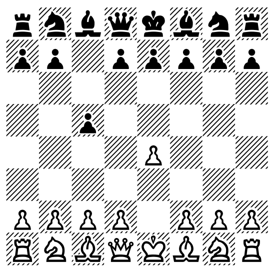
2335-mal getippt

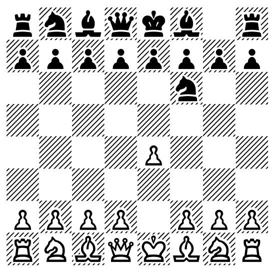
Kombinatorische Spiele: Schach

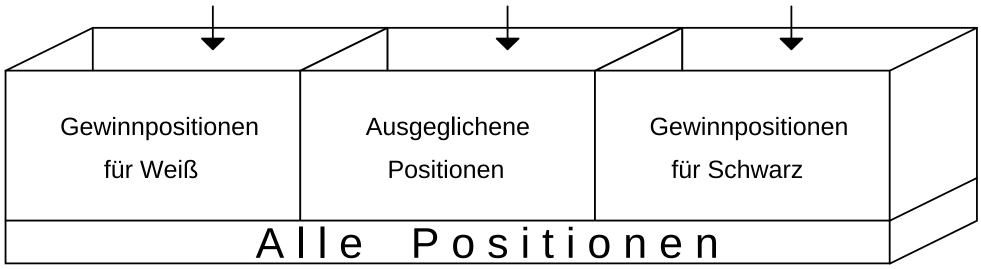
Gibt es unter den 4 abgebildeten Positionen 2, die im Hinblick auf die Gewinnaussichten absolut gleichwertig sind?


1. e2-e4, e7-e5


1. e2-e4, e7-e6


1. e2-e4, c7-c5

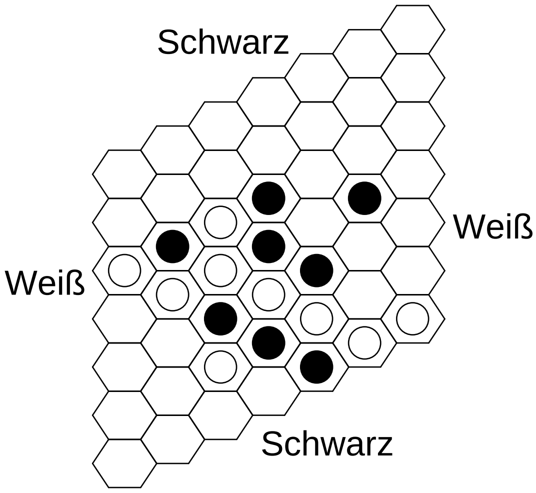

1. e2-e4, Sg8-f6



Der **Bestimmtheitssatz von Zermelo** (1912) besagt:

- **Positionen und Züge können** beim Schach untereinander **absolut**, d.h. ohne Bezug auf die gegnerische Strategie, **verglichen** werden
- Gilt für jedes **Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit perfekter Information** (jeder Spieler weiß dasselbe). Bei Zufallselementen für gilt die Aussage für die Gewinnerwartung. **Nicht** gültig für **Papier-Stein-Schere**, **3-Personen-Schach-Varianten** etc.
- Schachcomputer nutzen dieses Prinzip („Minimax”)
- Wer in 2 Partien mit wechselndem Anzug kein ausgeglichenes Gesamtergebnis erzielt, hat schlecht gespielt

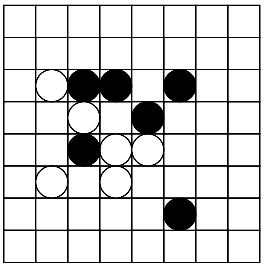
Brettspiele mit bekanntem Wert



Hex

abwechselnde Zugfolge:

- ziehender Spieler legt einen Stein der eigenen Farbe auf ein freies Feld
- Es gewinnt, wer "seine" Ränder miteinander verbindet



Go-Moku

abwechselnde Zugfolge:

- ziehender Spieler legt einen Stein der eigenen Farbe auf ein freies Feld
- Es gewinnt, wer mit seinen Steinen einer 5er-Kette (senkrecht, waagrecht oder diagonal) bildet

ca. 1948 **Nash**:
Anziehender Spieler kann bei „Hex“ Gewinn erzwingen:

- ♦ kein Remis möglich
- ♦ besäße Schwarz eine Gewinnstrategie, so könnte Schwarz diese „stehlen” (auch für Go-Moku anwendbar).

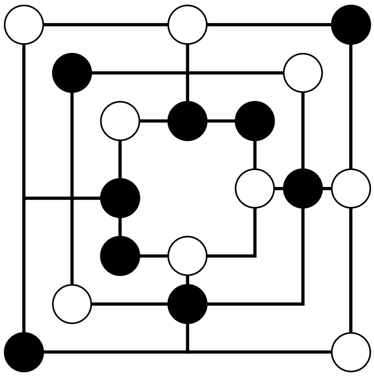
1979 **Reisch**:
Hex und Go-Moku sind PSPACE-vollständig und damit für große Spielbretter praktisch kaum entscheidbar (allerdings untereinander polynomial äquivalent)

1993 **Allis**, **van den Herik**, **Huntjens**:
Anziehender kann Go-Moku auf Spielbrett mit Breite $\geq$ 15 sicher gewinnen.

Brettspiele mit bekanntem Wert II

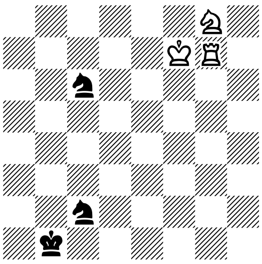
1994 **Nievergelt**, **Gasser**:
„Mühle muß keiner verlieren“

aus der Datenbank:



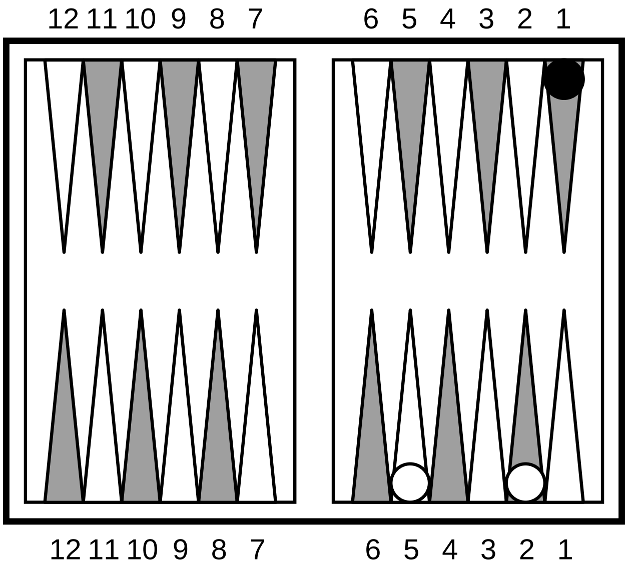
Der Nachziehende hat eine Gewinnstrategie: Weiß kann sich als Anziehender noch 37 Doppelzüge lang verteidigen; Schwarz hingegen „nur” 30 Doppelzüge.

1970-1996 **Ströhlein**, **Thompson**, **Stiller**:
Datenbanken für diverse Schach-Endspiele:

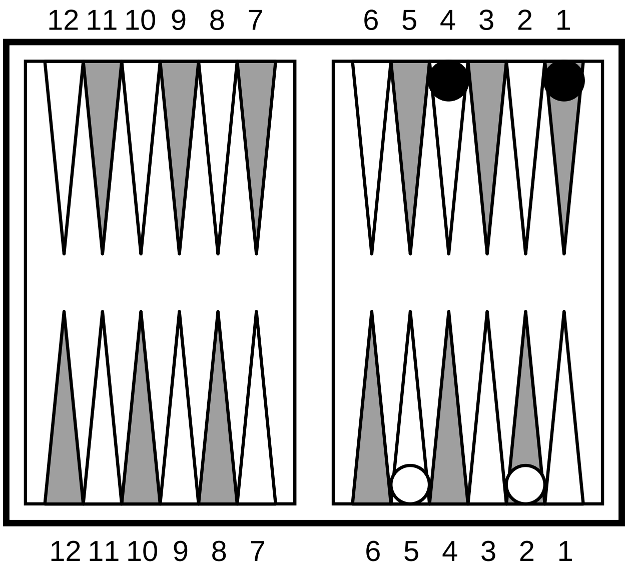


Weiß hat eine Gewinnstrategie, allerdings kann es 243 Doppelzüge bis zum erzwungenen Schlagen eines schwarzen Springers dauern.

Backgammon: Jacoby-Paradoxon



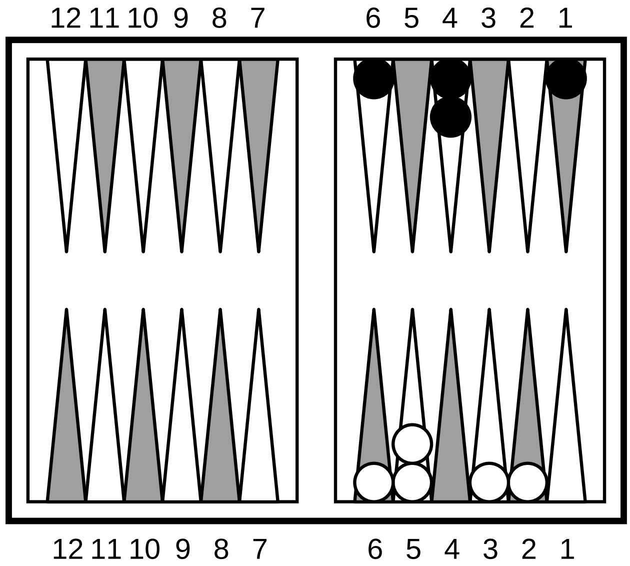
Weß am Zug: Doppeln: „Ja“, **Re-Doppeln: „Ja”**
(Schwarz sollte annehmen)



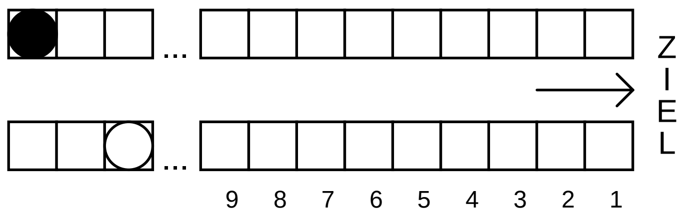
Weiß am Zug: Doppeln: „Ja“, **Re-Doppeln: „Nein“**
(Schwarz sollte annehmen)

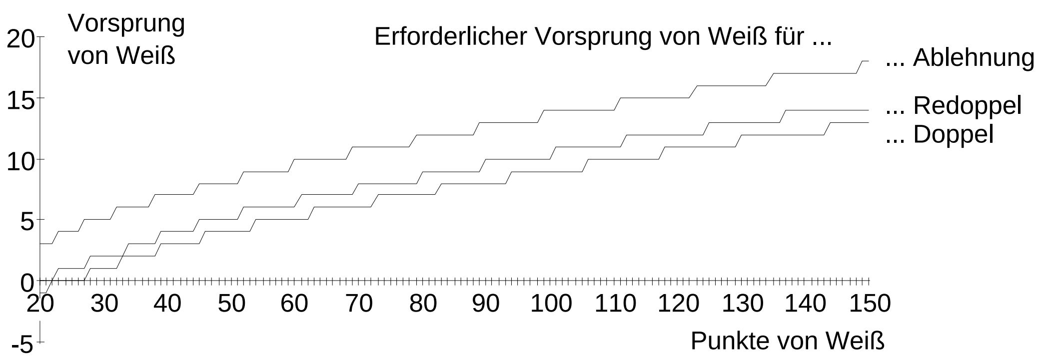
Fazit: Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist für Weiß in der zweiten Position besser. Gleichwohl sollte Weiß dort in Bezug auf ein Re-Doppel defensiver agieren (und ggf. auf eine bessere Chance im nächsten Zug warten).

Backgammon: Das Running Game ...



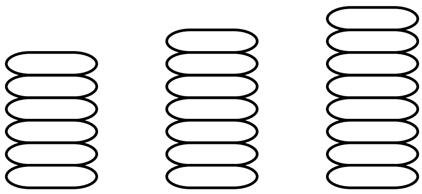
... und das Zwei-Steine-Modell





Kombinatorische Spieltheorie

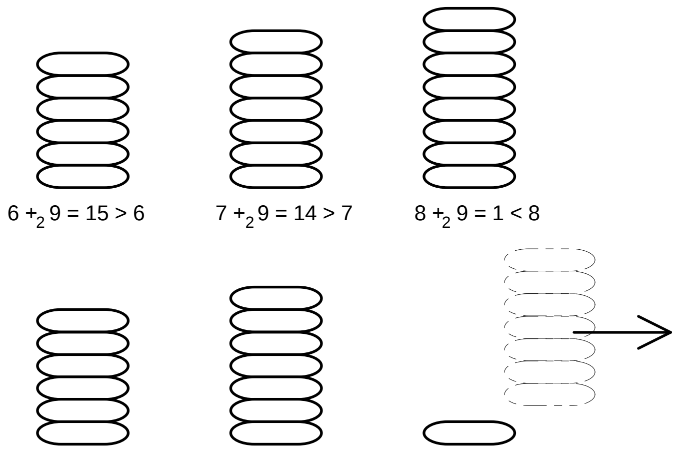
1901 **Bouton:**
für das neutrale LPW-Spiel (LPW = last player wins) gibt es eine Gewinnformel auf Basis der binären XOR-Operation



erlaubte Züge:
- wähle einen Haufen
- nehme von diesem Haufen soviele Steine wie gewünscht (mindstens einen)

Ziehe immer so, dass die Haufengrößen eine XOR-„Summe“ (binäre Summe ohne Übertrag) von 0 ergeben.

$6 \quad +_2 \quad 7 \quad +_2 \quad 8 \quad = \; 9$



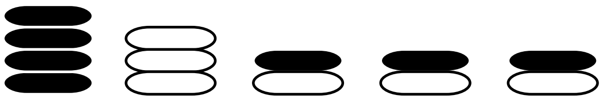
$6 \quad +_2 \quad 7 \quad +_2 \quad 1 \quad = \; 0$

1931-1939 **Lasker**, **Sprague**, **Grundy**
Erweiterung der Theorie auf Nim-Varianten (neutral, LPW, meist in Form disjunktiver Summen): „Jede Position eines solchen Spiels ist äquivalent zu einer Nim-Position“

1970- **Conway, Berlekamp, Guy**
Theorie für nicht-neutrale LPW-Spiele; Zahlbereichskonstruktionen

LPW-Spiel Schwarz-Weiß-Nim (vereinfachtes „Hackenbush” von **Conway, Berlekamp** und **Guy**)

Wer kann einen Gewinn erzwingen, wenn Weiß zuerst zieht, und wer, wenn Schwarz zuerst zieht?

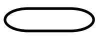


mögliche Züge:
- wähle Stein der eigenen Farbe
- entferne ihn und alle Steine darüber

Die Antwort ergibt sich daraus, dass jeder Position eine Zahl zugeordnet werden kann. Sie misst den Vorteil von Weiß und ist interpretierbar als

♦ Anzahl der Züge, die Weiß länger ziehen kann als Schwarz:

{Positionen des Schwarz-Weiß-Nim} $\to$ **Q**,

 $\to$ 1,  $\to$ -1,  $\to$ 0,

 $\to$ 0,  $\to$ ½

Die gewohnten Eigenschaften der rationalen Zahlen finden wir bei den Positionen wieder (die beschriebene Abbildung ist ein Homomorphismus geordneter Gruppen):

Zahlen	**Positionen**
Addition	disjunktive Summe: lege Positionen nebeneinander
inverses Element	Tausche die Farben aller Steine aus
größer als 0	Weiß hat eine Gewinnstrategie als An- und Nachziehender
Kern	“0-Positionen” (der nachziehende Spiele hat eine Gewinnstrategie)
Bild in **Q**	alle Brüche mit Zweierpotenzen im Nenner

Schwarz-Weiß-Nim II

Daher ist die erste Position äquivalent zu

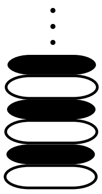
Folglich hat Weiß, ob an- oder nachziehend, eine Gewinnstrategie.

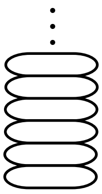
Weitere Beispiele (rekursiv analysierbar):

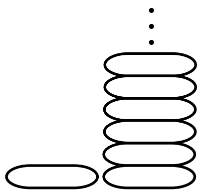
$\{0 \mid \,\} = 1$ $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$ $\{0, \frac{1}{2} \mid 1\} = \frac{3}{4}$ $\{0, \frac{1}{2} \mid 1, \frac{3}{4}\} = \frac{5}{8}$ $\{0, \frac{1}{2} \mid 1, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}\} = \frac{9}{16}$

Die Schreibweise {a, b, ... | u, v ...} beschreibt die Zugmöglichkeiten von Weiß (a, b, ...) und Schwarz (u, v, ...).

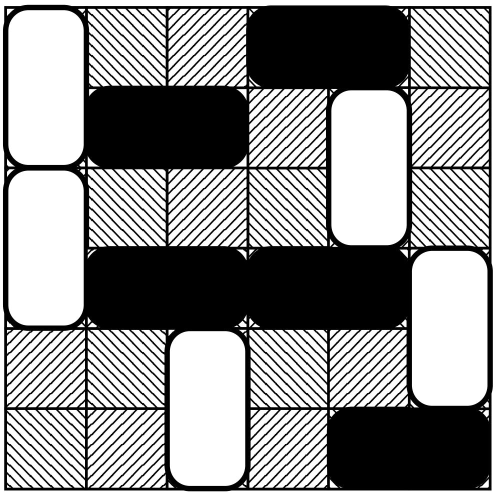
Mehr von mathematischen Interesse:
Mit unendlich hohen Türmen erhalten wir noch mehr Zahlen (beachte: die möglichen Zugfolgen sind stets endlich):


$= \frac{2}{3}$


$= \omega$


$= \omega + 1$

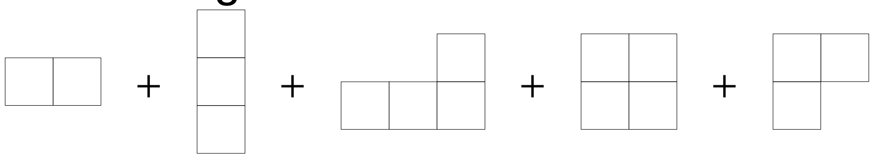
Ein LPW-Spiel mit Domino-Steinen:



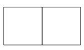
mögliche Züge:
- Weiß platziert seine Steine vertikal
- Schwarz platziert seine Steine horizontal

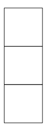
(daher reduziert jeder Zug die Zahl der freien Felder um 2)

Nur die Lücken sind interessant, dabei entstehen disjunktive Summen ganz von selbst:

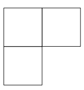


Es gibt Lücken, die keiner Zahl entsprechen:

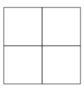
 = { | 0 } = -1

 = { $\square$ | } = { 0 | } = 1

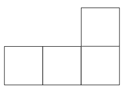
Für jede Zahl ε > 0 gilt ...

 = { $\square$ | $\square$ } = { 0 | 0 } =:✶

✶ > -ε
✶ < ε

 = { $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ | $\square\square$ } = {1 | -1} =: ±1

±1 > -1 - ε
±1 < 1 + ε

 = { $\square\square$ | $\square$ + $\square$, $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ } = { -1 | 0, 1} = -½

$$-1 + 1 - \tfrac{1}{2} + (\pm 1) + ✶ = -\tfrac{1}{2} + ✶ + (\pm 1)$$

Oben hat jeweils der zuerst ziehende Spieler eine Gewinnstrategie:

♦ Weiß zieht nach -½ + ✶ + (+1) = ½ + {0 | 0} bzw.
♦ Schwarz zieht nach -½ + ✶ - 1 = -1½ + {0 | 0}.

Programme für kombinatorische Spiele

1945-1950	**Turing**, **Shannon** (und **Zuse**): Computerschach: prinzipielle Ideen und eine erste Partie (**Turing**), Spielbaumsuche mit Minimax.
ca. 1960	**Newell, Shaw, Simon** u.a.: Computerschach: “α-β“ verdoppelt die Suchtiefe bei gleicher Rechenzeit.
1979	**Berliner**: Der amtierende Backgammon-Weltmeister Villa wird 7:1 geschlagen.
1997	**Campell, Hsu, Benjamin, Hoane** u.a.: „Deep Blue“ schlägt den amtierenden Schachweltmeister Kasparow.
2000	Erreichter Stand der Technik: Mit Ausnahme des Go sind für alle populären Brettspiele Spielprogramme auf Weltmeister Niveau realisiert. Für Go ist ein solches Programm nicht absehbar.

Strategische Spiele, allgemeine Spiele: Terminologie

Position: aktueller Zustand eines Spiels (was bisher passierte), z.B. bei Kartenspielen: die (Karten-)„Hände“ der Spieler.

Informationsmenge: der subjektive Spielzustand aus Sicht des ziehenden Spielers (entspricht der Menge der subjektiv nicht unterscheidbaren Positionen), z.B. die „Hand“ des ziehenden Spielers, aber nicht die der Gegner.

Zug: Auswahl-Entscheidung, die der „am Zug“ befindliche Spieler auf Basis seines aktuellen Informationsstandes treffen muß.

Strategie / reine Strategie: eine vollständige Handlungsanweisung für einen Spieler, die für jede subjektiv mögliche Entscheidungs-Situation eine Wahl vorsieht.

Gemischte Strategie: ein Spieler entscheidet sich dazu, seine Handlungsanweisung auf Basis einer festgelegten Wahrscheinlichkeitsverteilung zufällig auszuwählen.

Normalform eines Spiels: Funktion, welche die Spielergewinne abhängig von den ausgewählten (reinen) Strategien wiedergibt; im Fall eines 2-Personen-Nullsummenspiels ist die Normalform einfach eine (meist sehr große) Matrix („**Matrixspiel**”)

Strategische Spiele, allgemeine Spiele: Die Geschichte des Hauptergebnisses

Hauptergebnis (in Verallgemeinerung von Zermelo):

1926/1928	**von Neumann** Beweis des Minimax-Satzes: „Jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat einen eindeutigen Wert, sofern es mit gemischten Strategien gespielt wird.“ Pokermodell (publiziert 1944): Bluffs sind als Teil eines objektiv optimalen Verhaltens interpretierbar.

1713	**Waldegrave**, **Montmort**, **N. Bernoulli**: gemischtes Minimax-Verhalten für das einfache 2-Personen-Kartenspiel „Le Her“
1920-1924	**É. Borel**: 2-Personen-Spiele: Normalform; gemischte Strategien; z.B. Ziehen bei „5“ im Baccarat? Was ist optimales Verhalten in symmetrischen Spielen? Beweis des Minimax-Satzes für symmetrische 5x5-Spiele, aber Zweifel an Allgemeingültigkeit
1934	**R. A. Fisher**: gemischte Strategie für „Le Her“ (unabhängig von den Vorgängern)
1947-	**von Neumann, Tucker, Gale, Kuhn**: Berechnung gemischter Minimax-Strategien für Matrixspiele mittels Linearer Programme

Strategische Spiele, allgemeine Spiele: Weitere Resultate und ihre Geschichte

1944	**von Neumann**, **Morgenstern**: Begründung der Spieltheorie (Spiele dienen als Model für interaktive, ökonomische Entscheidungsprozesse); aber auch Spiele als Beispiele: Schach, Poker, Bridge
1950	**Nash** (Dissertation, Nobelpreis 1994): Existenznachweis für Nash Gleichgewicht: Ausgehend davon hat kein einzelner Spieler ein Interesse daran, seine [gemischte] Strategie zu ändern“; sein Beispiel: Modell eines 3-Personen-Poers
1953	**Kuhn**: In Spielen mit perfekten Erinnerungsvermögen („jeder weiß stets, was er vorher tat und vorher schon mal wußte“) reicht es aus, sog. Verhaltensstrategien zu verwenden: Jeder zufällige Mix einer Handlungsanweisung kann dann dabei „lokal“ realisiert werden mittels einer zufälligen Zug-Auswahl. Im Fall eines Poker-Modells bereits praktiziert 1944 (**von Neumann**).

Einfaches Poker-Modell (2 Spieler)

Symmetrische Anlage des Spiels:

- ♦ jeder Spieler erhält eine der Karten „1“, „2“, ... „6“ (bei den Wahrscheinlichkeiten wird von unabhängigen Gleichverteilungen ausgegangen – wie bei 2 Kartenblättern);
- ♦ gleichzeitige Gebots-Auswahl: 1, 2, 3, 5, 10 oder 15.

Normalform: 6^6 = 46646 reine Strategien.

Blatt	Minimax-Verhaltensstrategie					
Gebot	1	2	3	4	5	6
1	0,35857	0,56071	0,50643	0,46857		
2	0,33786	0,12179	0,41179			
3	0,14143	0,16500		0,51571	0,00429	
5	0,05629	0,12757			0,59286	
10	0,06700	0,02493	0,08179	0,01571	0,14029	
15	0,03886				0,26257	1,00000

Blatt	"Schattenpreise": durchschnittliche Kosten eines Fehlers					
Gebot	1	2	3	4	5	6
1					-0,18190	-3,33833
2				-0,02524	-0,28524	-3,44167
3			-0,09536			-3,15429
5			-0,07155	-0,23405		-2,66238
10						-2,92262
15		-0,05607	-0,23393	-0,39643		

Iterative Berechnung: Jedem Schritt liegt pro Spieler je eine Auswahl von reinen Strategien zugrunde. Erst werden zur Auswahl (relative) Minimax-Strategien, dann optimale Gegenstrategien berechnet. Sofern eine ermittelte Gegenstrategie nicht bereits zur Auswahl des betreffenden Spielers gehört, wird sie darin aufgenommen, andernfalls ist man fertig (2×44 reine Strategien reichen).

alternativ: Lineares Programm mit Nebenbedingungen (**Romanovski** 1962, **von Stengel** 1996).

Mastermind

k^n-Version: n Farben, k Stecker

Regeln: Der **Codierer** wählt einen von k^n Codes versteckt aus; der **Decodierer** rät Zug für Zug einen Code und erhält als Antwort

- die Zahl der korrekt geratenen Stecker
- die maximal mögliche Zahl von Steckern, die sich mit einer beliebigen Permutation erzielen ließe.

Positionen: charakterisiert durch die Menge aller aktuell noch möglichen Codes.

Optimierung der Strategie im Mastermind: Möglichkeiten und Ergebnissse im Fall der 6^4-Version:

- **worst case:**
  Codierer darf „mogeln", d.h. seinen Code während des Spiels ändern (kompatibel zu den bisherigen Antworten) – ergibt 2-Personen-Spiel mit perfekter Information:
  5 Rateversuche reichen (**Knuth** 1976).

- **average case:**
  Für den Code wird Gleichverteilung unterstellt.
  Backward induction liefert optimale Suchstrategie:
  4,340 (bei max. 6) Züge (**Koyama**, **Lai** 1993)

- **Minimax** (im Sinne eines 2-Personen-Spiels)**:**
  Beide Spieler wählen eine gemischte Strategie:
  $\leq$ 4,3674 (**Flood** 1986), $\geq$ 4,340 (s.o.)
  = 4,341 (**Wiener** 1995, Newsgroup im Internet)

„QUAAK!“ - ein Kinderspiel?

<u>Symmetrisches Kinderspiel (Ravensburger):</u>

- ♦ 2 Spieler knobeln über mehrere Runden,
- ♦ jeder Spieler erhält anfänglich 15 Chips,
- ♦ pro Runde darf ein Spieler 0 bis 3 Chips setzen,
- ♦ der Spieler mit der höheren Chip-Zahl gewinnt die Runde
- ♦ Bei einem Vorsprung von 3 Gewinnrunden wird das Spiel gewonnen.

Rekursives Spiel mit Normalformen bis zur Größe 3×3 zu jedem denkbaren Zwischenstand wie z.B.:

<u>Spielanfang: (2×15 Chips):</u>

Im ersten Zug optimal im Sinne einer Minimax-Strategie ist der folgende zufällige Mix:

0 Chips: 0,1212
1 Chip: 0,2272
2 Chips: 0,0000 („Schattenpreis“: 0,0852)
3 Chips: 0,6515

(die Berechnung basiert auf einer entsprechenden Analyse aller nachfolgend möglichen Positionen)

Was kann man mit einer „optimalen“ Spielweise erreichen?

Wir gehen aus von einem „fairen“, d.h. symmetrischen, Spiel aus (z.B. der Symmetrisierung eines a priori unsymmetrischen Spiels: Hin- und Rückrunde mit vertauschten Farben):

- ♦ Schach
- ♦ Backgammon
- ♦ Papier-Stein-Schere, Poker zu zweit
- ♦ Schachvariante für drei Spieler
- ♦ Poker zu dritt

Kein Spieler kann so spielen, dass ihm ***mehr* als 0** garantiert ist (wegen der Symmetrie). Aber: Kann ein Spieler so spielen, dass er den **Ausgleich sicher** hat?

- ♦ **Schach**: Ja.
  Ein Spieler, der keinen Fehler macht, erzielt mind. 0.

- ♦ **Backgammon**: Ja (eine Gewinnerwartung von 0 ist garantiert, sofern der Spieler optimal spielt).

- ♦ **Papier-Stein-Schere, Poker zu zweit**: Ja (eine Gewinnerwartung von 0 ist garantiert sofern der Spieler seine Strategie optimal mischt).

- ♦ **Schachvariante zu dritt**: Nein.
  Daher für intellektuelle Wettkämpfe ungeeignet.
  [Es existieren einzig Strategien, die sich zu einem Gleichgewicht kombinieren].

- ♦ **Poker zu dritt:** Nein.
  [Es existieren einzig gemischte Strategien, die sich zu einem Gleichgewicht kombinieren].