Die Mathematik der Gesellschaftsspiele

Vortrag im Rahmen der Rüdlinger Tage
des Fachbereichs Mathematik
der Züricher Hochschule Winterthur

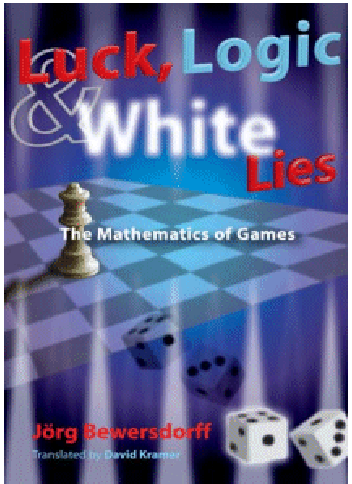
31. August - 2. September 2005

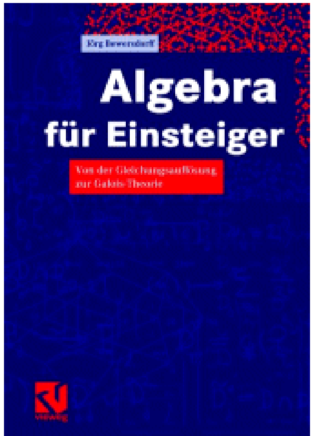
Jörg Bewersdorff

http://www.bewersdorff-online.de

Zur Person

- 1975-1985 Studium: Mathematik in Bonn
- 1985 Promotion (Zahlentheorie, algebraische Topologie)
- 1985- tätig in der Automatenwirtschaft
- 1998 **„Glück, Logik und Bluff"**
- 2002 „Algebra für Einsteiger"
- derzeit Geschäftsführer von drei Automatenherstellern





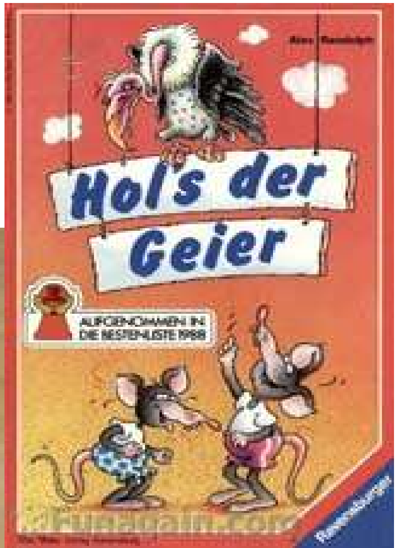
Spieltheorie und richtige Spiele ???

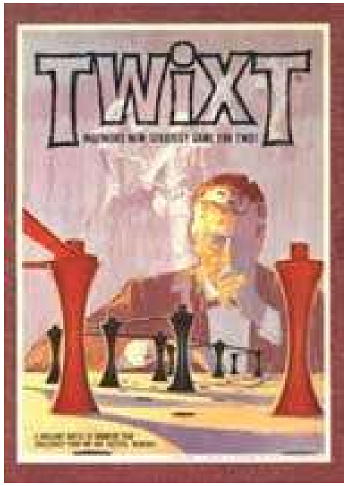
- Einige Ökonomen bevorzugen die Bezeichnung „interaktive Entscheidungstheorie” statt „Spiel-theorie”
- Auch die Wahrscheinlichkeitsrechung begann einmal als „Glücksspieltheorie”
- **Aber:**
  Von Neumann und seine Zeitgenossen machten ausgiebig Gebrauch von richtigen Gesellschafts-spielen als Beispielen

Gesellschaftsspiele ...

Es gibt zwei Elemente, durch die sich Spiele von allen anderen unserer Erfahrungswelten unterscheiden. Das eine Element ist die **Ungewissheit**, das andere Element die **Gerechtigkeit**.

Alex Randolph, Spielautor





Ungewissheit

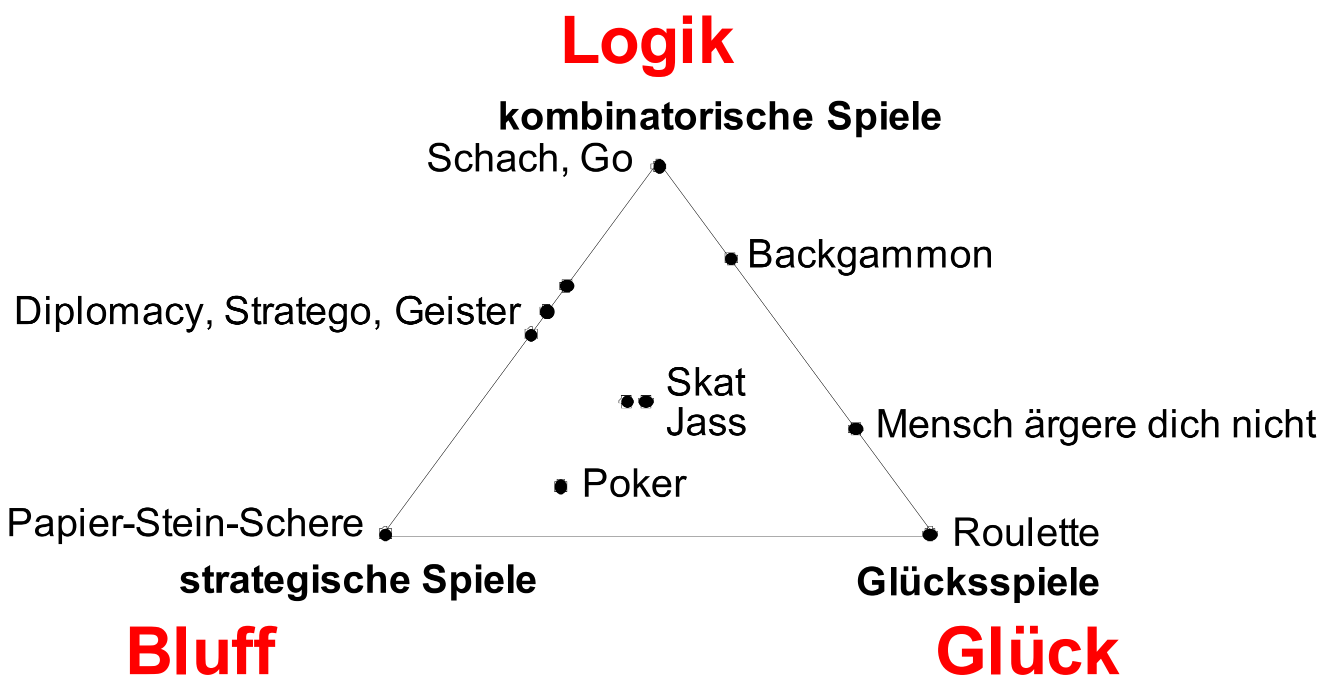
- Letztlich **die** Motivation zum Spiel, erzeugt sowohl
  - **Unterhaltung** und **Spannung** durch Abwechslung wie
  - allseitige **Gewinnhoffung**

- Für diese Ungewissheit gibt es prinzipiell drei verschiedene **Ursachen** ...

Ungewissheit: Ursachen

- **Zufall** (Kartenmischen, Würfeln)
- **vielfältige Kombinationen** von Zugmöglichkeiten zu Zugfolgen (Schach: selbst ein „Zwei-Züger" kann nicht-trivial sein)
- **verdeckte Information** (jeder kennt nur seine eigenen Karten bzw. gleichzeitige Züge wie bei Papier-Stein-Schere)

(Bei-)Spiele für Spieltypen



Spiele aus mathematischer Sicht ...

- Habe ich eine **Aussicht zu gewinnen** und wie groß ist sie? Wie lässt sie sich überhaupt **quantifizieren**?
- Welcher der aktuell möglichen Züge ist **der beste Zug** für mich?
- Sind die **Züge** überhaupt untereinander **objektiv vergleichbar**?
- Ideales Testfeld: Symmetrisierte Spiele ...

... und aus spielerischer Sicht: Gerechtigkeit im Spiel?

Herstellung eines Ausgleichs durch

- „fairen Einsatz" bei reinem Glücksspiel bzw.
- Symmetrisierung („Hin- und Rückrunde"):
  - Kann ein guter Spieler dabei einen Ausgleich (d.h. Gesamtgewinn = 0) erzwingen? Ein höherer Garantiegewinn ist dabei ohnehin nicht drin!
  - Wenn nicht: Ist der Ausgleich zumindest in Form eines Erwartungswertes erzwingbar?
  - Wie lassen sich die dafür notwendigen Spielweisen („Strategien") finden, sofern existent?

Gerechtigkeit: (Bei-)Spiele (Ausblick auf Teile 2 u. 3)

- Kann ein idealer (Computer-)Spieler bei einem symmetrisierten Spiel insgesamt 0 erzwingen?
  1. **Schach**: Ja.
  2. **Backgammon**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  3. **Papier-Stein-Schere, 2-Personen-Poker**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  4. **3-Personen-Schach**: Nein (nur Gleichgewicht, daher für intellektuelle Wettkämpfe ungeeignet).
  5. **3-Personen-Pokern**: Nein (nur Gleichgewicht)

„Fahrplan” für ❶ bis ❺

- Präzisierung der beschriebenen Sachverhalte mittels exakter Begriffsbildungen und Beweisführungen.
- **Problem:** Berechne gute Spielweisen („Strategien”), sofern existent.
- Sind die Algorithmen dafür effizient oder müssen Kompromisse gemacht werden?

Anwendungen mathe- matischer Spiel-Analysen

- Realisierung gut(!) spielender Programme
- Mathematische Charakterisierung recht- licher Einordnungen (z.B. „Glücksspiel” in Abgrenzung zum „Geschicklichkeitsspiel”)
  Schach gegen einen Computer wird – trotz der ausschließlich von der Logik beherrschten Spielregeln – zum Glücksspiel, wenn die Bedingungen so gesetzt werden, dass der Computer seine im Programm angelegte Überlegenheit ausspielen kann und der Durchschnittspieler deshalb auch unter Aufbietung höchster geistiger Anspannung chancenlos ist.
  Verwaltungsgericht Wiesbaden 10.10.1995 (5/3 E 32/94)
- Modellierung realer Entscheidungspro- zesse (z.B. zur Versteigerung von UMTS- Lizenzen)

Die Mathematik der Spiele

- Zufall: **Wahrscheinlichkeitsrechnung** (ab 1654 „Glücksspieltheorie" von Pascal und Fermat)
- Kombinationsvielfalt: diverse Bezüge zur Mathematik, seit ca. 1970 insbesondere **Kombinatorische Spieltheorie**
- verdeckte Information: **Spieltheorie** (John von Neumann: 1928 und richtig ab 1944).

1. GLÜCK:
Vom Glücksspiel ...

- 1222-1268 (anonym):
  Kombinatorik für 3 Würfel und deren Interpretation als „Chance"
- ca. 1400 (anonym):
  Teilungsproblem: Wie ist der Einsatz bei Abbruch einer Glücksspiel-Serie zu teilen?
- Später: mehrfach falsche Lösungen zu den beiden erstgenannten Problemen
- 1654 **Fermat**, **Pascal** (und **de Méré**) lösen:
  - Teilungsproblem
  - Reichen 24 Würfe, um auf mind. eine Doppel-Sechs zu setzen?

... zur Wahrscheinlichkeit

- 1657-, 1703-, 1786- **Huygens**, **Bernoulli**, **Laplace ...**
  Glücksspiele sind Standard- aber nicht alleinige Beispiele:
  - determinierte Modell-Situation
  - „Laplace-Modell" reicht
  - Wahrscheinlichkeit: Chance auf Gewinn (aufgrund von Symmetrien oder als experimentell bestimmbarer Messwert)
  - Zufallsgröße: Höhe des Gewinns
  - Erwartungswert: „fairer" Einsatz, z.B.:
    $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ „fairer" Einsatz für zwei Gewinnspiele X, Y;
    $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ für unabhängige X,Y , „fairer" Einsatz für „Schiebewette"
- 1713 Petersburger Paradoxon
  zeigt, dass exaktes Fundament notwendig ist

Knobeln mit Würfeln

- Zwei Personen würfeln um die höchste Zahl
- Verwendet werden drei symmetrische Spezialwürfel:
  - A: 5 - 7 - 8 - 9 - 10 - 18
  - B: 2 - 3 - 4 - 15 - 16 - 17
  - C: 1 - 6 - 11 - 12 -13 -14
- Zuerst wählt Spieler 1 einen Würfel, dann Spieler 2 einen der beiden anderen.
- Wer hat die besseren Chancen zu gewinnen?

Die Würfel sind nicht transitiv!

- Für die drei zugehörigen Zufallsgrößen gilt

  $$P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = 21/36$$

- Es gibt damit keinen „besten" Würfel bezüglich der (naheliegenden) Relation

  „X ist besser als Y"   g.d.w.

  $$P(X > Y) > 1/2$$

- Bei 4 Würfeln können sogar Wahrscheinlichkeiten von 2/3 erreicht werden.

Wahrscheinlichkeiten beim Roulette

- Roulette ist – außer bei defekten Kesseln – mathematisch eher uninteressant
- Es gibt ein Gesetz der großen Zahlen, aber kein „Gesetz des Ausgleichs", d.h.:

  In Spielserien nähern sich die relativen Häufigkeiten den Wahrscheinlichkeiten an (die Überschreitung beliebig kleiner Abweichungen wird beliebig unwahrscheinlich). Die absoluten Wahrscheinlichkeiten konvergieren nicht!

  Beispiel, dass es beim Gesetz der großen Zahlen keines Ausgleichs bedarf:

  Nach 10×„Rot" nimmt bei 6×„Rot" und 4×„Schwarz" das relative Übergewicht von „Rot" ab, obwohl das absolute Übergewicht zunimmt.

Erwartungswerte beim Lotto

- Wahrscheinlichkeiten für alle ca. 14 Mill. „6 aus 49"-Tipps sind gleich.
- Quoten bei selten gesetzten Zahlen und Zahlkombinationen sind höher.
- Besonders schlecht sind „Geburtstagstipps" und regelmäßige geometrische Muster. Dazu eine Untersuchung von 6,8 Mill. Tippreihen (Baden-Württ. 1993) ...

Lotto: 6,8 Mill. Tippreihen

1	2	3	4	5	6	~~7~~
8	9	10	11	12	~~13~~	14
15	16	17	18	~~19~~	20	21
22	23	24	~~25~~	26	27	28
29	30	~~31~~	32	33	34	35
36	~~37~~	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

4004-mal getippt

1	2	3	4	5	6	~~7~~
8	9	10	11	12	13	~~14~~
15	16	17	18	19	20	~~21~~
22	23	24	25	26	27	~~28~~
29	30	31	32	33	34	~~35~~
36	37	38	39	40	41	~~42~~
43	44	45	46	47	48	49

3817-mal getippt

1	2	3	4	~~5~~	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	~~27~~	28
29	30	31	32	33	~~34~~	~~35~~
36	~~37~~	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	~~49~~

3698-mal getippt

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

3249-mal getippt

1	2	3	~~4~~	5	6	7
8	9	10	~~11~~	12	13	14
15	16	17	~~18~~	19	20	21
22	23	24	~~25~~	26	27	28
29	30	31	~~32~~	33	34	35
36	37	38	~~39~~	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

2821-mal getippt

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	~~13~~	14
15	16	17	18	~~19~~	20	21
22	23	24	~~25~~	26	27	28
29	30	~~31~~	32	33	34	35
36	~~37~~	38	39	40	41	42
~~43~~	44	45	46	47	48	49

2335-mal getippt

Black Jack

- Mit „Siebzehn-und-Vier" verwandtes Casinospiel, das gegen die Bank gespielt wird. Chancen variieren je nach Strategie (z.B. Gewinnerwartung –0,057 bei naheliegender Bank-Imitat-Strategie).
- Baldwin u.a. (1956): Optimale Ziehstrategie (ohne Berücksichtigung der gezogenen Karten, Gewinnerwartung: – 0,006 bis –0,008 je nach Regelvariante).
- Thorp 1961: Bei Berücksichtigung der gezogenen Karten ist positive Gewinnerwartung möglich:

Monopoly

- Meistverkauftes Wirtschaftsspiel: Circa 200 Mill. Exemplare seit 1931.

Monopoly: Das Problem

- **Wo winken die besten Renditen?**
- Strategischer Einfluss: kaum beim Ziehen, wohl aber bei den Investitionen.
- Symmetrie-Bruch durch Gefängnis (inkl. Pasch-Regel und Karten „Gehen Sie ... ”. Die 40 Felder unterscheiden sich daher erheblich im Hinblick auf die durchschnittliche Besuchs-Häufigkeit!
- Ertragskennziffer: Miethöhe × Wahrscheinlichkeit (= pro Zug zu erwartende Miete)

Monopoly als Markow-Kette

- Monopoly-Würfel-Rundkurs entspricht einer regulären Markow-Kette mit 120 Zuständen (40 Felder mit jeweils 3 Pasch-Unterzuständen).
- Eindeutig bestimmte Gleichverteilung kann mittels (Monte-Carlo-)Simulation oder durch Lösen eines linearen 120×121-Gleichungssystems ermittelt werden:

www.bewersdorff-online.de/monopoly

Monopoly: Das Resultat

- Bei der deutschen Ausgabe landet man auf dem Opernplatz (Bundesplatz, Bern) durchschnittlich 48% häufiger als auf der Parkstraße (Place St-François, Lausanne).

Spielautomaten

- Deutsche Spielautomaten (Aufstellung in Gast- und Spielstätten) müssen den Anforderungen der Spielverordnung genügen:
  - Spielzeit $\geq$ 12 sec
  - Einsatz $\leq$ 0,20 Euro
  - Gewinn $\leq$ 2 Euro + zusätzliche Gewinnoptionen (max. 50 bzw. 100 sog. „Sonderspiele”)
  - Erwartungswert $\geq 0{,}6 \cdot$ Netto-Einsatz
- Gewinn und „Verbrauch” von Gewinnoptionen führt zu Markow-Ketten, welche für diverse Stra-tegien zu untersuchen sind.

Spielautomaten: Ein Beispiel

LOGIK / BLUFF
Gerechtigkeit: (Bei-)Spiele

- Kann ein idealer (Computer?-)Spieler bei einem symmetrisierten Spiel insgesamt 0 erzwingen?
  - ❶ **Schach**: Ja.
  - ❷ **Backgammon**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  - ❸ **Papier-Stein-Schere, 2-Personen-Poker**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  - ❹ **3-Personen-Schach**: Nein (nur Gleichgewicht, daher für intellektuelle Wettkämpfe ungeeignet).
  - ❺ **3-Personen-Pokern**: Nein (nur Gleichgewicht)

2. LOGIK:

❶ Schach: Vorher, ...

In genauem Verhältnis zu dem Fortschreiten des Schachspiels steht die Ungewissheit jedes folgenden Zuges. Wenn ein paar Züge ge-macht worden sind, so ist kein weiterer Schritt mehr sicher. Ver-schiedene Zuschauer des Spieles würden verschiedene Züge anraten. Es hängt also alles vom veränderlichen Urteil der Spieler ab. Wenn wir nun annehmen (was nicht anzunehmen ist), dass die Züge des automatischen Schachspielers in sich selbst bestimmt wären, so würden sie doch durch den nicht zu bestimmenden Willen des Gegenspielers unterbrochen und in Unordnung gebracht wer-den. Es besteht also gar keine Analogie zwischen den Operationen des Schachspielers und denen der Rechenmaschine des Herrn Babbage.

Edgar Alan Poe (über den Schachautomaten des Baron von Kempelen)

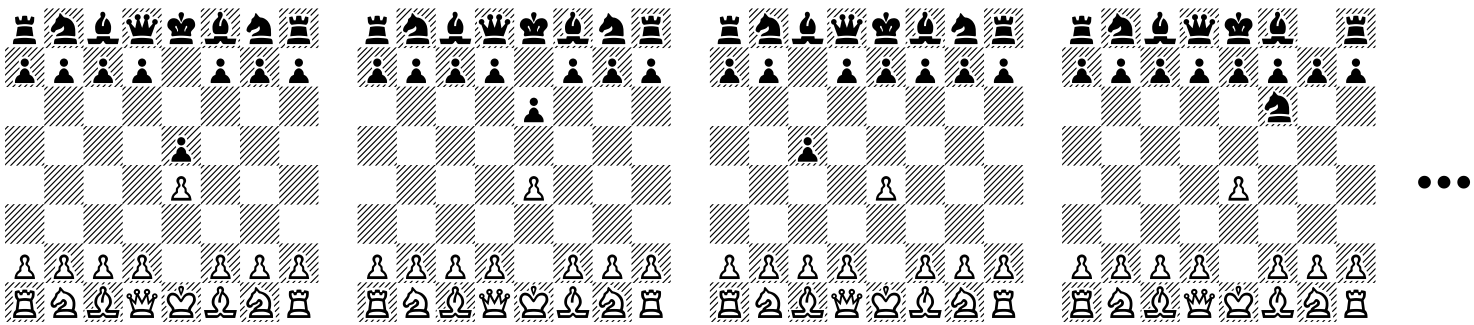
Schach: … die Frage, …

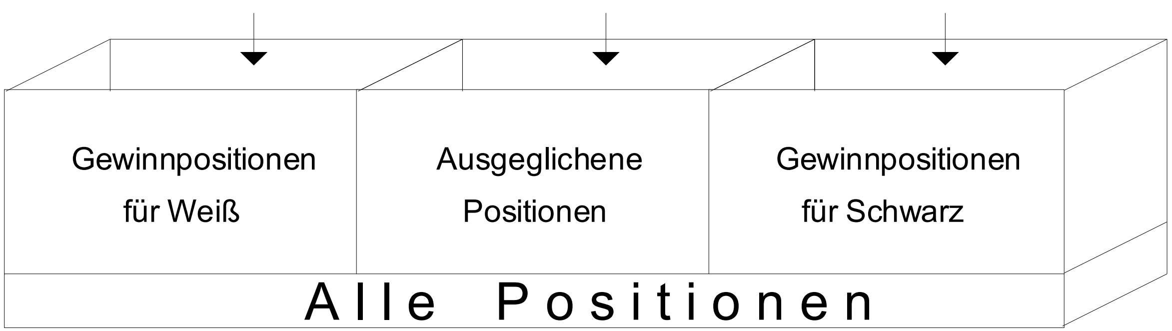
Kann der Wert einer beliebigen während des Spiels möglichen Position für eine der spielenden Parteien sowie der bestmögliche Zug mathematisch-objektiv bestimmt oder wenigstens definiert werden, ohne dass auf solche mehr subjektiv-psychologischen wie die des „vollkommenen Spielers" und dergleichen Bezug genommenen zu werden brauchte? Dass dies wenigstens in einzelnen besonderen Fällen möglich ist, beweisen die sogenannten „Schachprobleme", d.h. Beispiele von Positionen, in denen der Anziehende nachweislich in einer vorgeschriebenen Anzahl von Zügen das Matt erzwingen kann.

Ernst Zermelo, 1912

Schach: ... die Antwort, ...

Jede Schachposition (=Stellung + Zugrecht) gehört zu genau einer Klasse:

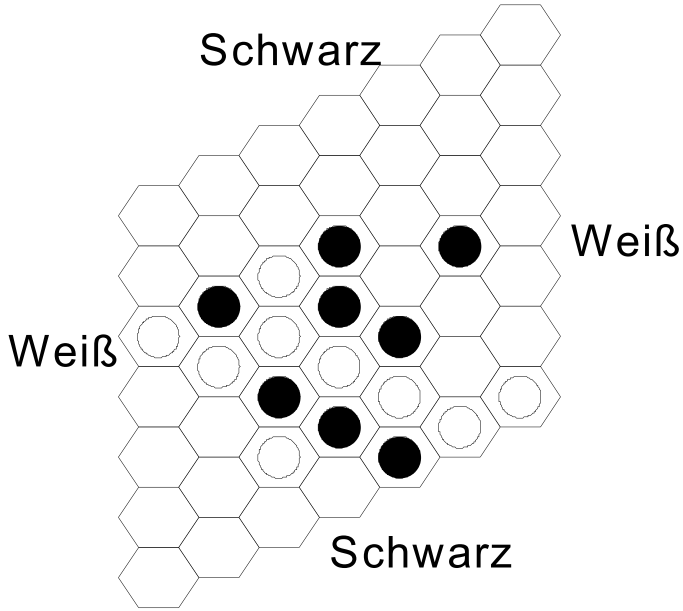




... die Theorie: Zermelos Satz

- Jedes endliches Zwei-Personenspiel-Nullsummenspiel mit perfekter Information besitzt einen eindeutigen Wert.
  - Rekursive Berechnung durch Bildung des Maximums bzw. Minimums der Werte der Nachfolge-positionen.
  - Bei Zufallszügen ist der Erwartungswert zu berechnen.

Manche Spiele sind einfach ...



Hex:

- gezogen wird abwechselnd,
- Sieger ist, wer „seine" Seiten verbindet

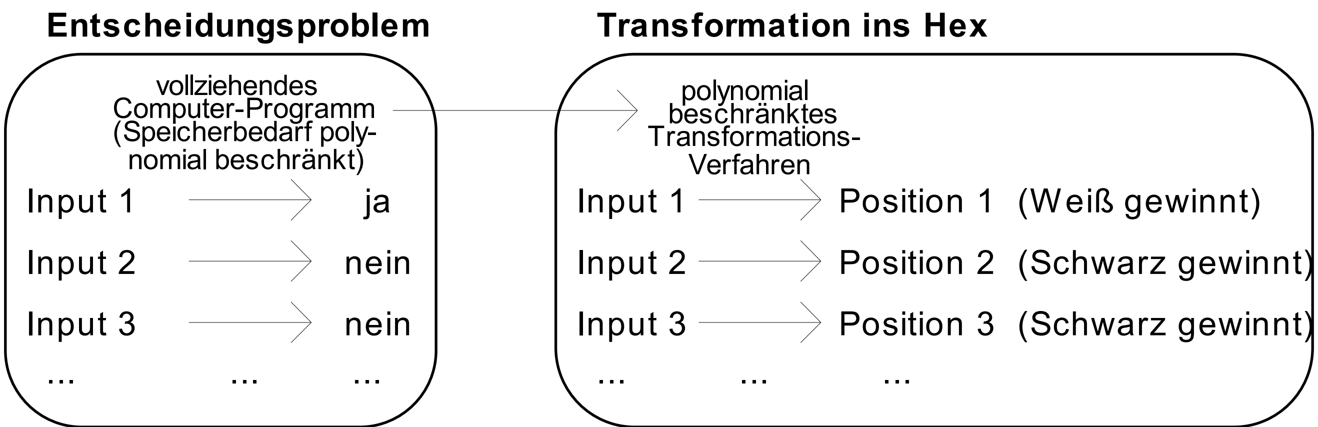
- Kein Unentschieden möglich,
- also besitzt Anziehender Gewinnstrategie (Nash 1948, „Strategieklau"-Argument)

... und doch kompliziert ...

Die Entscheidung, ob eine gegebene Hex-Position eine Gewinnposition für Weiß ist, ist PSPACE-vollständig!

Bewiesen von Stefan Reisch 1979 (Diplomarbeit). Der Satz bedeutet:

Für jedes PSPACE-Problem gibt es eine in polynomial beschränkter Zeit berechenbare „Transformation ins Hex".



... und das bedeutet:

- Ein effizienter Entscheidungsalgorithmus für Hex-Positionen würde viele schwierigs-te Entscheidungsprobleme effizient lösen.
- Daher ist nach heutigem Erkenntnisstand davon auszugehen, dass kein Algorithmus existiert, der für große Spielbretter mit realistischem Aufwand arbeitet.
- Hex ist polynomial-äquivalent zu anderen PSPACE-vollständigen Problemen wie Go-Moku („Fünf in einer Reihe").

Vollständig gelöst:

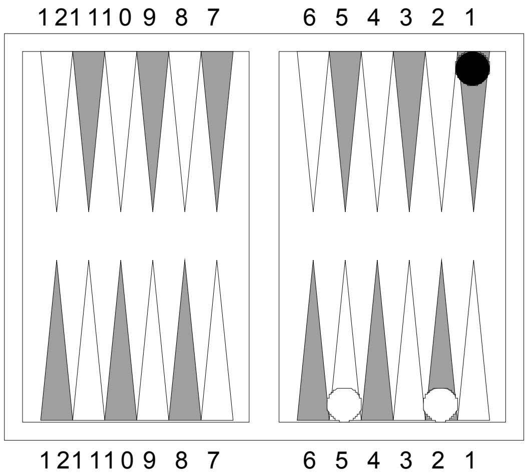
- Mühle muss keiner verlieren!
  - 1994 beweisen von Nievergelt und Gasser mittels Konstruktion einer Datenbank, die zu einer genügend großen Menge von Positionen Remis-haltende Zügen enthält.
- Diverse Schachendspiele
  - Datenbanken z.B. für KTS-KT, KD-KSS, KD-KSL, KD-KLL, KTL-KT

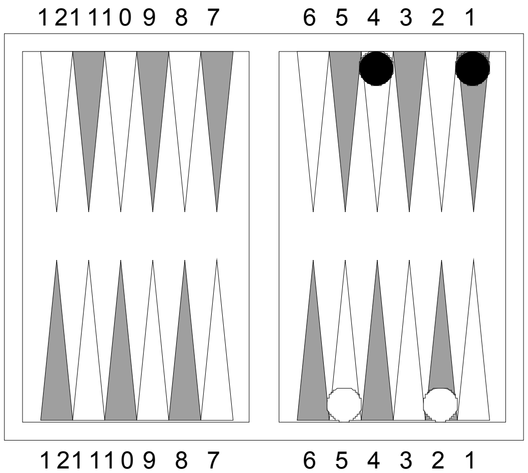
Gerechtigkeit: (Bei-)Spiele

- Kann ein idealer (Computer?-)Spieler bei einem symmetrisierten Spiel insgesamt 0 erzwingen?
  1. **Schach**: Ja.
  2. **Backgammon**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  3. **Papier-Stein-Schere, 2-Personen-Poker**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  4. **3-Personen-Schach**: Nein (nur Gleichgewicht, daher für intellektuelle Wettkämpfe ungeeignet).
  5. **3-Personen-Pokern**: Nein (nur Gleichgewicht)

❷ Auch vollständig gelöst:

Für (sehr) späte Backgammon-Endspiel-positionen wurden die Werte (und die zugehörige Doppel-Strategie) berechnet.





Vorsicht: Weiß am Zug sollte links nicht redoppeln, wohl aber rechts (Jacoby-Paradoxon).

Optimales 2-Personen-Memory

- Jede Position wird charakterisiert durch
  - die Anzahl der noch verdeckten Karten und
  - die Anzahl der Paare, von denen die Lage genau eines Partners bekannt ist.
- Positionswerte sind rekursiv berechenbar mittels Minimax und Erwartungswert (Zwick, Paterson 1993).

  Ab und zu ist es optimal, nach dem (zufälligen) Auf-decken einer Karte ohne bekannten Partner nicht dessen Partner zufällig zu raten, sondern destruktiv eine bekannte (nicht passende!) Karte aufzudecken.

Gerechtigkeit: (Bei-)Spiele

- Kann ein idealer (Computer?-)Spieler bei einem symmetrisierten Spiel insgesamt 0 erzwingen?
  1. **Schach**: Ja.
  2. **Backgammon**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  3. **Papier-Stein-Schere, 2-Personen-Poker**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  4. **3-Personen-Schach**: Nein (nur Gleichgewicht, daher für intellektuelle Wettkämpfe ungeeignet).
  5. **3-Personen-Pokern**: Nein (nur Gleichgewicht)

3. BLUFF: Spiele ohne perfekte Information

- **Frage:**
  Kann man sich dagegen wehren, in einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit imperfekter Information von seinem Gegner psychologisch eingeschätzt und durchschaut zu werden?

Ein Beispiel:

Dieses Spiel ist einfach und wird mit Murmeln gespielt. Ein Spieler hält eine Anzahl dieser Kugeln in der Hand und fragt einen anderen, ob es eine gerade oder ungerade Summe ist. Wenn der Betreffende richtig rät, hat er eine gewonnen; wenn falsch, eine verloren. Der Junge, den ich meine, gewann alle Murmeln in der Schule. Natürlich hatte er ein Prinzip beim Raten; und es beruhte auf der bloßen Beobachtung und dem Abschätzen der Schläue seiner Gegner. Zum Beispiel ist der Gegner ein ausgemachter Dummkopf: er hält seine geschlossene Faust hoch und fragt: ‚Gerade oder ungerade?'. Unser Schuljunge antwortet ‚ungerade' und verliert. Aber beim nächsten Versuch gewinnt er, denn er sagt sich: ‚Der Dummkopf hatte beim ersten Mal gerade, aber beim zweiten Versuch reicht seine Überlegung nur soweit, dass er jetzt ungerade macht; deshalb rate ich auf ungerade.' – Er rät auf ungerade und gewinnt. Bei einem Dummkopf von nächsthöherem Grad hätte er so kombiniert: ‚Dieser Bursche merkt, dass ich beim ersten Mal ungerade geraten habe, und beim zweiten Mal wird er zunächst Lust zu einer simplen Abwechslung von gerade zu ungerade haben wie der erste Dummkopf. Aber dann wird ihm ein zweiter Gedanke kommen, dass dies nämlich eine zu simple Veränderung sei, und schließlich wird er sich wieder wie vorher zu gerade entscheiden. Deshalb rate ich auf gerade.' – Er rät auf gerade und gewinnt. Nun, welcher Art ist diese Kombination des Schuljungen, den seine Kameraden ‚vom Glück begünstigt' nannten – wenn man sie letztlich analysiert?

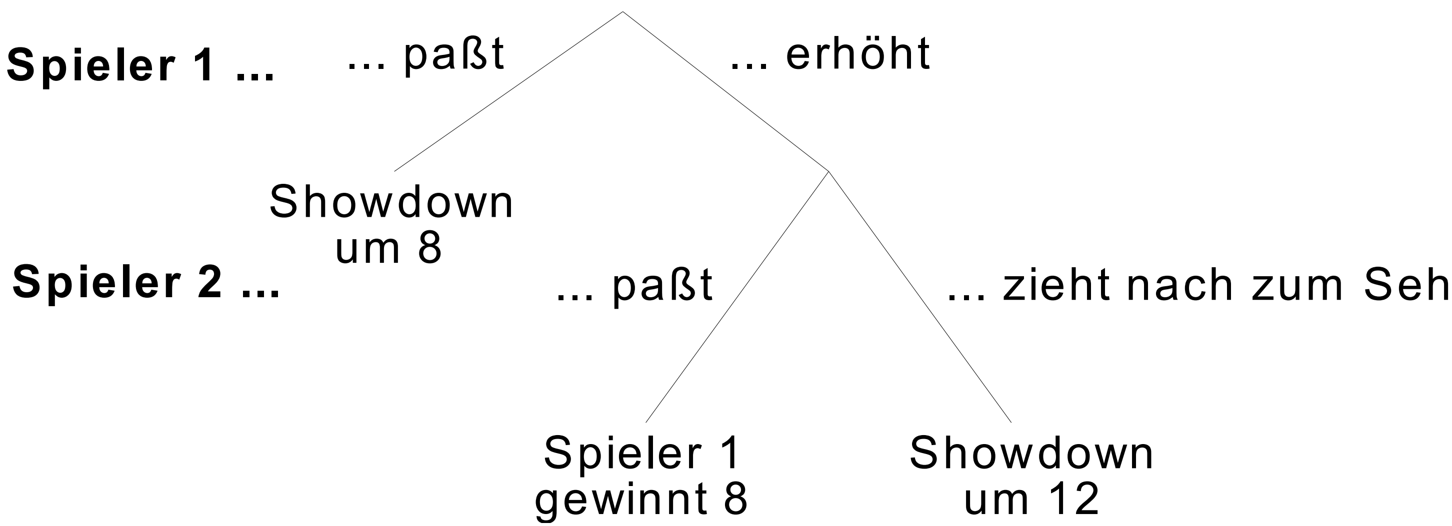
Edgar Allan Poe („Der entwendete Brief")

❸ Poker-Modell ...

(ähnlich von Neumann, schematischer Ablauf)

Mindesteinsatz von 8

Kartenverteilung (H bzw. N mit jew. 0,5 Wahrscheinlichkeit)



... warum ein Modell?

Jedoch ist das wirkliche Pokern ein viel zu komplizierter Gegenstand für eine erschöpfende Diskussion, und so müssen wir es einigen vereinfachenden Modifikationen unterwerfen, von denen einige wirklich radikal sind. Trotzdem scheint uns, dass die Grundidee des Pokerns und seine entscheidenden Eigenschaften in unserer vereinfachten Form erhalten bleiben. Daher wird es uns möglich sein, allgemeine Schlussfolgerungen und Interpretationen auf den Ergebnissen zu gründen ...

John von Neumann, Oskar Morgenstern

... in Normalform

		Spieler 2			
		PP	PS	SP	SS
Spie-ler 1	PP	0	0	0	0
	PE	2	0	3	1
	EP	6	1	4	-1
	EE	8	1	7	0

	N:S	H:S
N:P	0	-8
H:E	12	0

	N:S	H:P
N:E	0	8
H:E	12	8

Allgemein enthält die Normalform die Erwartung der Auszahlungen („Gewinne") für die Spieler in Abhängigkeit vollständiger Handlungspläne (sog. „Strategien").
Bei einem Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel („Matrix-Spiel") braucht man nur die Auszahlungserwartungen eines Spielers anzuführen.

… ohne dominierte Strategien

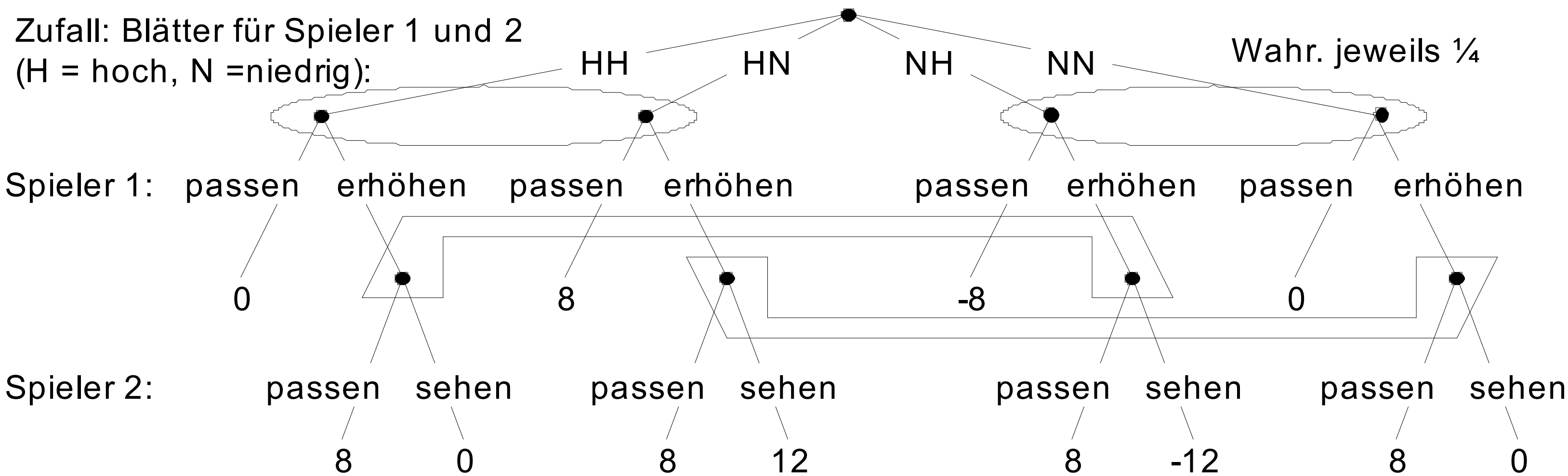
- Wer bei hoher Karte „H” nicht „erhöht” bzw. „sehen” will, ist blöd.

		Spieler 2		
		PS	SS	gS
Spie-ler 1	PE	0	1	0,5
	EE	1	0	0,5
	gE	0,5	0,5	0,5

Dominierte Strategien (wie EP von Spieler 1)sind solche Strategien, die ein Spieler unabhängig von der Spielweise seiner Mitspieler ohne Risiko einer persönlichen Verschlechterung durch andere Strategien ersetzen kann.

Gemischte Strategien sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die (reinen) Strategien des betreffenden Spielers (z.B. gE: PE bei „Zahl”; EE bei „Kopf”).

... in extensiver Form



Die extensive Form eines Spieles ist ein Baum-Graph, der (weitgehend) dem chronologischen Verlauf eines Spieles entspricht.

Wurzel: Anfangsposition

Knoten: Position (ziehender Spieler bzw. Zufall entscheidet) oder Endposition

Kante: Zug gemäß einer Entscheidung

Für den ziehenden Spieler subjektiv nicht unterscheidbare Positionen sind zu so genannten Informationsmengen zusammengefasst (perfekte Information: alle Informationsmengen sind einelementig)

Eigenschaften des (Bei-)Spiels

- Zwei-Personen-Nullsummenspiel
- Jeder Spieler hat 4 (reine) Strategien
- Spiel bietet keine perfekte Information
  (je Spieler zwei 2-elementige Informationsmengen)
- Spieler haben „perfect recall"
  d.h.: jeder Spieler weiß immer, was er zuvor schon einmal wusste (durchlaufene Positionen) und gemacht (gezogen) hat.

generell:

- Jeder Eintrag der Normalform entsteht durch Bildung eines Erwartungswertes

Die Verhaltensstrategien

- Spieler 2 kann die Wirkung seiner gemischten Strategien auch dadurch realisieren, dass er seine Zufallsentscheidungen „lokal”, d.h. für jede Informationsmenge einzeln (und unabhängig) voneinander, realisiert.
- Strategiemenge wird kleiner: kartesisches Produkt zweier 1-dimensionaler Simplizes statt 3-dimensionalem Simplex.
- Geht immer bei „perfect recall” (Kuhn 1953)

Sattelpunkt des (Bei-)Spiels

- Kein Sattelpunkt in reinen Strategien
- Reduzierte Normalform bietet genau ein Gleichgewicht in gemischten Strategien:
  - Bei hoher Karte „H" offensiv agieren (erhöhen bzw. sehen).
  - Bei niedriger Karte „N" sollte mit Wahrschein-lichkeit von 0,5 „geblufft" werden, d.h. offen-siv gespielt werden.

Sattelpunkt: Beide Spieler erhalten die maximale sicherbare Auszahlung. Das heißt: Die Auszahlung kann nicht vom anderen Spieler gefährdet wer-den, und mehr ist ohne Risiko einer Verschlechterung nicht drin.
Reduzierte Normalform: Normalform ohne dominierte Strategien

Warum man bluffen sollte

Das wesentliche Moment ... ist, dass ein Spieler mit starkem Blatt wahrscheinlich hoch bieten – und oft überbieten wird. Wenn folglich ein Spieler hoch bietet oder überbietet, so kann sein Gegenspieler – a posteriori – annehmen, dass der andere ein starkes Blatt hat. Unter Umständen kann das den Gegner zum „Passen" veranlassen. Da aber beim „Passen" die Karten nicht verglichen werden, kann gelegentlich auch ein Spieler mit schwachem Blatt einen Gewinn gegen einen stärkeren Gegner erzielen, indem er durch hohes Bieten oder Überbieten einen (falschen) Eindruck von Stärke hervorruft und so seinen Gegner begreiflicherweise zum Passen veranlasst.

Dieses Manöver ist als „Bluffen" bekannt. Es wird zweifellos von allen erfahrenen Spielern angewandt.

John von Neumann, Oskar Morgenstern

Sattelpunkt: Deutung

- Bei Zwei-Personen-Nullsummenspielen ist die Auszahlung eines Sattelpunktes eine eindeutig bestimmte Invariante des Spiels (der sog. **Wert des Spiels**)
- Spieler 1 kann bei entsprechender Strategie mindestens diesen Wert als Erwartung realisieren.
- Mehr ist aber, zumindest wenn Spieler 2 entsprechend agiert, nicht drin.

Minimax im symmetrischen Fall

Gegeben symmetrisches („gerechtes”) Zwei-Personen-Nullsummenspiel, d.h. Matrix A der Normalform ist schief-symmetrisch: $A^t = -A$

Kann ein (zu erwartender) Verlust verhindert werden (mehr ist aufgrund der Symmetrie ohnehin nicht drin)?

Übrigens: Jedes 2-Personen-Nullsummenspiel kann als Teil eines symmetrischen Spiels gesehen werden.

... in mathematischer Formulierung:

Gibt es zum symmetrischen Spiel ($A^t = -A$)

$$(x, y) \in S_n \times S_n \mapsto x^t A y$$

$$(\text{mit } S_n = \{x \in \mathrm{R}^n \mid (1,\ldots,1)x = 1\}, x \geq 0)$$

ein $x \in S_n$ mit

$$x^t A \geq 0\,?$$

Symmetrische 2-Personen-Nullsummenspiele

- Beispiel: Papier-Stein-Schere: ok (bei gleichgewichtigem Mix der drei Strategien)
- Problem wurde erstmals von E. Borel 1921 gestellt (seine Vermutung: „Nein").
- Existenzbeweis im allgemeinen Fall (nicht-symmetrische Spiele) 1926/1928 durch John von Neumann (1903-1957)
- Aber wie berechnen?

Lineares Programm für symmetrische Spiele

Trick: Ersetze $(1,\ldots,1)x = 1$ durch $(1,\ldots,1)x \leq 1$ und suche nach dem Maximum von

$$(1,\ldots,1)x$$

unter den Nebenbedingungen

$$Ax \geq 0,\ (1,\ldots,1)x \leq 1 \text{ und } x \geq 0.$$

Löse diese LP z.B. mit dem Simplex-Algorithmus (nehme $x = 0$ als erste zulässige Lösung).

Nicht-symmetrische Spiele

Jedes Matrix-Spiel besitzt stets einen Sattelpunkt. Für eine gegebene n×m-Spielmatrix gilt

$$\min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} x^t A y = \max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} x^t A y$$

Deutung: Ein Spieler muss seine Strategie seinem Gegner offen legen.

Von Neumanns Minimax-Satz entspricht dem Dualitätssatz der Linearen Programmierung.

Nicht-symmetrische Spiele

sind ebenfalls mit einem Linearen Programm lösbar. Gegeben sei n×m-Spielmatrix. Gesucht ist

$$x^t A \geq \lambda\,(1,\ \ldots, 1)$$

$$(1,\ \ldots, 1)x = 1$$

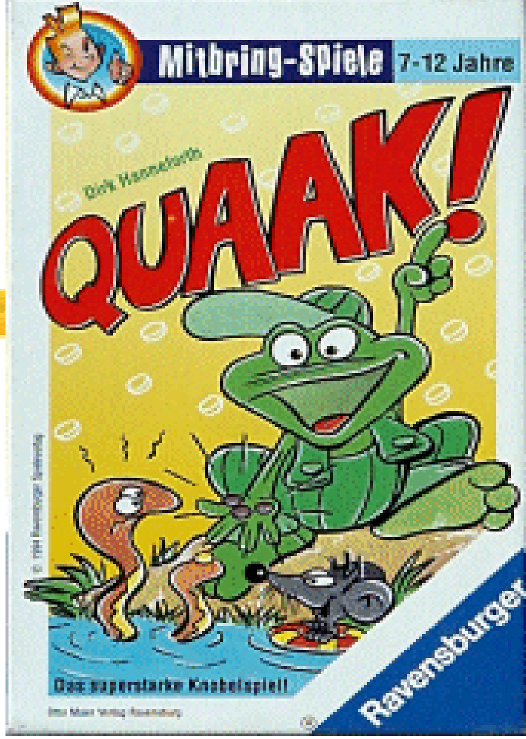
$$x \geq 0$$

$$\lambda \to \max.$$

Nicht triviale Beispiele

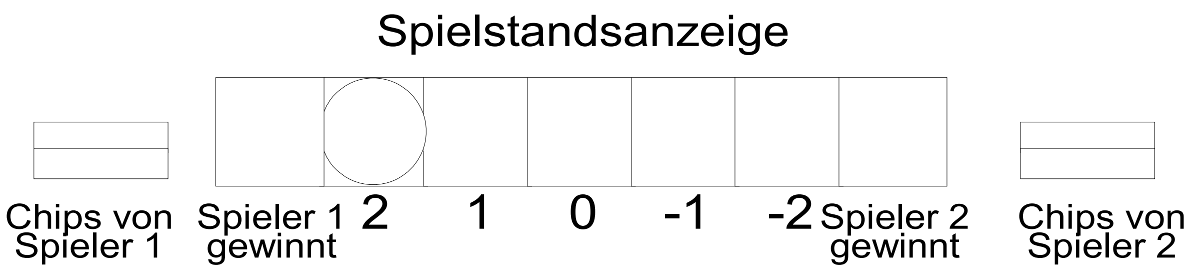
- Aufgrund der großen Normalformen sind die LP der wenigsten „richtigen" Spiele wirklich lösbar.
- Nachfolgend drei nicht-triviale Beispiele:
  - Kinderspiel QUAAK! von Ravensburger Spiele,
  - ein weiteres Poker-Modell,
  - Le Her (Klassiker, 1713, Waldegrave).

QUAAK! – Die Regeln



- Einfaches Bluffspiel für Kinder (2 Spieler)
- Jeder Spieler erhält am Anfang 15 Chips, pro Durchgang dürfen davon 0 bis 3 (verborgen für den Gegner) gesetzt werden. Der Spieler mit mehr Chips gewinnt die Runde.
- Das Spiel gewinnt, wer 3 Runden mehr gewonnen hat als der Gegner.

Die rekursive Analyse ...



Die Normalform dazu:

Spieler 2 wählt ... Spieler 1 wählt ...	0	1	2	(0, 1/2, 1/2)
0	½	0	1	0,5
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0,5
(1/2, 0, 1/2)	0,75	0,5	0,5	0,5

... die Resultate und ...

Position: Chips(Left) = 2 Chips(Right) = 2 Score(Left) = 2 Compute !

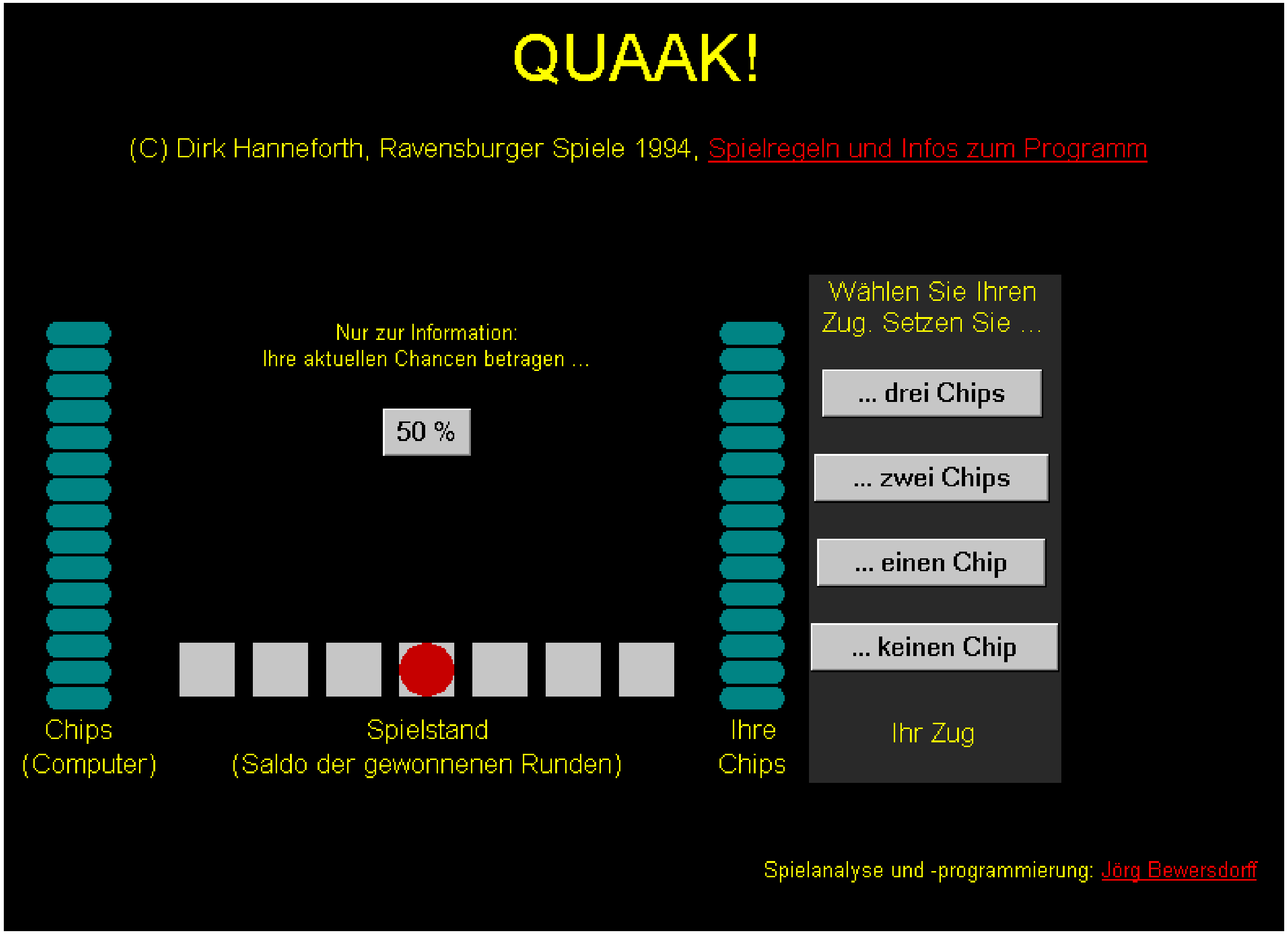
This position as matrix game (including minimax strategies):

	Right	0	1	2
Left		0.0000	0.5000	0.5000
0	0.5000	0.5000	0.0000	1.0000
1	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
2	0.5000	1.0000	1.0000	0.0000

The minimax value is **0.5000**.

http://www.bewersdorff-online.de/quaak/comp/comp.htm

... und das Endprodukt...



http://www.bewersdorff-online.de/quaak/quaak.htm

Übrigens

Schon mit dem ersten Zug kann man Chancen „verspielen“:

Position: Chips(Left) = 15 Chips(Right) = 15 Score(Left) = 0 Compute !

This position as matrix game (including minimax strategies):

		Right	0	1	2	3
Left			0.1213	0.2272	0.0000	0.6515
	0	0.1213	0.0000	-0.2474	-0.0570	0.0863
	1	0.2272	0.2474	0.0000	-0.2340	-0.0460
	2	0.0000	0.0570	0.2340	0.0000	-0.2230
	3	0.6515	-0.0863	0.0460	0.2230	0.0000

The minimax value is **0.0000**.

Der sog. Schattenpreis bei 2 Chips beträgt gegen einen Minimax-Spieler -0,0852 (die Gewinnwahrscheinlichkeit sinkt auf 0,4574).

Weiteres Poker-Modell und ...

- Kartenblatt: 6 mögliche, gleichwahrscheinliche Werte.
- Kartenziehungen der Spieler voneinander unabhängig.
- Gleichzeitige Gebots-Auswahl: 1, 2, 3, 5, 10 oder 15.

- Normalform hat Größe $6^6 \times 6^6$:
jeweils $6^6 = 46646$ reine Strategien

... seine Minimax-Strategie

Gebot \ Blatt	1	2	3	4	5	6
1	0,35857	0,56071	0,50643	0,46857		
2	0,33786	0,12179	0,41179			
3	0,14143	0,16500		0,51571	0,00429	
5	0,05629	0,12757			0,59286	
10	0,06700	0,02493	0,08179	0,01571	0,14029	
15	0,03886				0,26257	1,00000

Minimax-Verhaltensstrategie

Gebot \ Blatt	1	2	3	4	5	6
1					-0,18190	-3,33833
2				-0,02524	-0,28524	-3,44167
3			-0,09536			-3,15429
5			-0,07155	-0,23405		-2,66238
10						-2,92262
15		-0,05607	-0,23393	-0,39643		

„Schattenpreise”: Einbußen bei Fehlern

Berechnung kann auf Basis von 2×44 reinen Strategien stattfinden ...

Zur Berechnung

- Iterativ:
  - Jedem Schritt liegen zwei Mengen von reinen Strategien zugrunde. Starte mit zwei einelementigen Strategiemengen.
  - Bezogen auf diese Strategiemengen werden jeweils (relative) Minimax-Strategien samt zugehörigem Minimax-Wert berechnet.
  - Berechne jeweils optimale Gegenstrategien (rekursiv im Spielbaum). Nehme diese in die Strategiemengen auf, wenn sie „besser" sind.

Le Her: Die Regeln

- 2 Spieler (Weiß und Schwarz). Es gewinnt derjenige mit der höheren Karte am Ende.
- Gespielt wird mit 52er-Blatt; die Rangfolge ist K, D, B, 10, 9, ... 3, 2, As gilt. Bei Gleichstand gewinnt Schwarz.
- Zu Beginn je eine Karte für Weiß und Schwarz sowie eine verdeckt auf den Tisch.
- Nun bekommt jeder Spieler eine Chance, seinen Kartenwert zu verbessern:
  - Weiß beginnt und darf dabei den Austausch seiner Karte mit Schwarz verlangen. Schwarz darf diesen Tausch nur bei einem König verweigern.
  - Unabhängig davon, wie die erste Tauschmöglichkeit verlaufen ist, erhält nun Schwarz seine Chance: Dabei darf er seine Karte mit der verdeckt auf dem Tisch liegenden Karte tauschen, wobei auch er einen König zurücklegen muss.
- Anschließend legen die beiden Spieler ihre Karten auf den Tisch und rechnen ab.

Le Her: Die „Problemgröße"

- Weiß besitzt $2^{13} = 8192$ reine Strategien
- Schwarz besitzt, abgesehen von offen-sichtlich schlechteren Strategien, ebenfalls $2^{13} = 8192$ reine Strategien (nach einem Tausch von Weiß ist dessen neue Karte Schwarz bekannt, so dass er genau weiß, ob ein Tauschen angebracht ist).

Le Her: Optimale Verhaltensstrategien

- Weiß:
  - Niedrige Karten bis einschließlich 6 tauschen,
  - hohe Karten ab 8 behalten,
  - tauscht 7 mit Wahrscheinlichkeit 3/8.
- Schwarz, sofern Weiß nicht getauscht hat:
  - Niedrige Karten bis einschließlich 7 tauschen,
  - hohe Karten ab 9 behalten,
  - tauscht 8 mit Wahrscheinlichkeit 5/8.
- Nach einem Tausch von Weiß ist dessen Karte Schwarz bekannt ...

Le Her: Die Berechnung

Schritt	hinzugekommene Strategie ...		Umfang der Strategie-Auswahl bei ...		Minimax-Wert der Strategie-Auswahl	Gewinnerw. für Weiß, wenn die Minimax-Strategie optimal gekontert wird durch ...	
	... bei Weiß	... bei Schwarz	Weiß	Schw.		... Schwarz	... Weiß
1	„tausche nie“	„tausche nie“	1	1	-0,0588235	-0,2586425	0,1523379
2	„tausche bis 5“	„tausche bis 6“	2	2	0,0104374	0,0063348	0,0406033
3	„tausche bis 7“	„tausche bis 7“	3	3	0,0273303	0,0237104	0,0273303
4	-	„tausche bis 8“	3	4	0,0237104	0,0237104	0,0258824
5	„tausche bis 6“	-	4	4	0,0250679	0,0250679	0,0250679

Le Her: Historie

Laut Briefwechsel zwischen Montmort und Niklaus Bernoulli (1713) beträgt die Gewinnerwartung ge-mäß Waldegrave

$$\frac{11327-(8p-3)(8u-5)}{22100},$$

sofern Weiß seine Wahl zufällig mittels $a+b$ Jetons (a für „tauschen", b für „nicht tauschen") und Schwarz gemäß $c+d$ Jetons (c für „tauschen", d für „nicht tauschen") trifft:

$$p=a/(a+b),\ u=c/(c+d)$$

Gerechtigkeit: (Bei-)Spiele

- Kann ein idealer (Computer?-)Spieler bei einem symmetrisierten Spiel insgesamt 0 erzwingen?
  - ❶ **Schach**: Ja.
  - ❷ **Backgammon**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  - ❸ **Papier-Stein-Schere, 2-Personen-Poker**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  - ❹ **3-Personen-Schach**: Nein (nur Gleichgewicht, daher für intellektuelle Wettkämpfe ungeeignet).
  - ❺ **3-Personen-Pokern**: Nein (nur Gleichgewicht)

❹ Endliche Mehrpersonenspiele mit perfekter Information

- Die Existenz eines Sattelpunktes ist nicht gesichert (gilt bereits bei 2-Personen-Spielen ohne Nullsummencharakter).
- Allerdings existiert Gleichgewicht in reinen Strategien (Kuhn 1950)
  - Es kann mehrere Gleichgewichte mit unterschiedlichen Auszahlungen geben.
  - Stabilität eines Gleichgewichtes ist schwach: Einzelner hat keinen Vorteil bei Abweichung.

3-Personen-(Bei-)Spiele

- 3-Personen-Schach:
  Wird wohl nie den Charakter eines intellektuellen Wettkampfes erhalten.
- 3-Personen-Nim:
  - Von einem Haufen mit 10 Steinen dürfen pro Zug 1 bis 5 Steine genommen werden.
  - Derjenige, dem es gelingt, den letzen Zug zu machen, gewinnt eine Einheit von dem, der als Vorletzter gezogen hat.

3-Personen-Nim: Analyse ...

Haufengröße	Gewinn für den als ... 1.	2.	3. ... ziehenden Spieler	
0	0	-1	1	
1	1	0	-1	nimm 1
2	1	0	-1	nimm 2
3	1	0	-1	nimm 3
4	1	0	-1	nimm 4
5	1	0	-1	nimm 5
6	-1	1	0	beliebig
7	0	-1	1	nimm 1
8	1	0	-1	nimm 1
9	1	0	-1	nimm 2
10	1	0	-1	nimm 3
11	1	0	-1	nimm 4
12	1	0	-1	nimm 5
13	-1	1	0	beliebig
14	0	-1	1	nimm 1
15	1	0	-1	nimm 2

Die Auszahlung der Gleichgewichte ist stets eindeutig bestimmt.

... und ...

Haufengröße	Gewinn für den als ... 1.	2.	3. ... ziehenden Spieler	Summe dieser drei Gewinne
0	**0**	- 1	1	0
1	**1**	0	- 1	0
2	**1**	0	- 1	0
3	**1**	0	- 1	0
4	**1**	0	- 1	0
5	**1**	0	- 1	0
6	**-1**	1	0	0
7	**0**	- 1	0	- 1
8	**0**	- 1	- 1	- 2
9	**0**	- 1	- 1	- 2
10	**0**	- 1	- 1	- 2
11	**0**	- 1	- 1	- 2
12	**0**	0	- 1	- 1
13	**-1**	0	- 1	- 2
14 und mehr	**-1**	- 1	- 1	- 3

Was einzelne Spieler aus eigener Kraft sicher erreichen können.

… Interpretation:

Zitate:

- Beim Start mit 10 Steinen:
  [Spieler] A gewinnt demnach, wofern nicht B seinem eigenen Interesse entgegen handelt, und er verliert auch dann nicht, wenn nicht zudem C denselben Fehler begeht.
- Beim Start mit noch größeren Haufen:
  Wenn freilich B und C jeder einmal im Spiel [einen] solchen Fehler begehen, um nachher das Spiel fehlerlos zu Ende zu führen, so ist A verloren.

Emauel Lasker, 1931

Gerechtigkeit: (Bei-)Spiele

- Kann ein idealer (Computer?-)Spieler bei einem symmetrisierten Spiel insgesamt 0 erzwingen?
  1. **Schach**: Ja.
  2. **Backgammon**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  3. **Papier-Stein-Schere, 2-Personen-Poker**: Ja (idealer Spieler kann 0 als Erwartungswert erzwingen).
  4. **3-Personen-Schach**: Nein (nur Gleichgewicht, daher für intellektuelle Wettkämpfe ungeeignet).
  5. **3-Personen-Pokern**: Nein (nur Gleichgewicht)

❺ 3-Personen-Poker-Modell

- Untersucht von Nash 1950 in seiner Dissertation als Anwendung für die bewiesene Gleichgewichts-Existenz.
- Eindeutig bestimmtes Nash-Gleichgewicht.
- Berechnung schwierig.
- Wegen „perfect recall” mit Verhaltensstrategien realisierbar.
- Zu Strategien für Koalitionen gibt es nicht unbedingt äquivalente Verhaltensstrategien.

Zum Schluss: Ein Spiel ...

Mastermind mit 4 Löchern und 6 Farben:

- Codierer wählt verborgenen Farbcode (6^4 = 1296 Möglichkeiten).
- Decodierer versucht, den Code möglichst schnell zu raten.
- Jeder Tipp wird beantwortet mit:
  - schwarzer Antwortstecker für „Farbe und Position richtig" sowie
  - weißer Stecker für „richtig erst nach einer Permutation"

... dreimal Optimalität

Jede Position entspricht einer Menge von Codes (nämlich denjenigen, die mit den bisherigen Fragen und Antworten kompatibel sind).

- (Nicht interaktive) Entscheidungstheorie:
  Code wird mit Gleichverteilung ausgelost („average case”);
  zu erwartende Rateversuche des Decodierers sind minimal
  5625/1296 = 4,340 (Koyama, Lai 1993).
- Worst case (entspricht Minimax gegen mogelnden Codierer): 5 Rateversuche (Knuth 1976).
- Spieltheoretischer Wert:
  5600/1290 = 4,341 (Michael Wiener 1995, unveröffentlicht)

Für Risiken und Nebenwirkungen der beschriebenen Strategien wird ...

… nicht gehaftet!